EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

53e jaargang
1977/1978
no 3
november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 21,—; contributie zonder Euclides *f* 15,—.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 32,–. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 18,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.
Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.
Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Vakdidaktische notities

FRED GOFFREE

6 Struktureren

Monique zit, als ik dit schrijf, ongeveer twee maanden in de derde klas van het atheneum.
Vorige week mocht ik haar helpen bij de voorbereiding van een wiskunde-proefwerk. Eerlijkheidshalve moet ik bekennen dat ze me niet vaak om hulp vraagt. Alleen bij proefwerken. Het gevolg is dan ook steeds weer dat in korte tijd haar verzamelde moeilijkheden doorgenomen worden.
Bij voorbaat is daarmee elke poging om de zaken in een groter verband te plaatsen, tot mislukking gedoemd.
Deze keer ging het om logaritmen. Ik herinner me dat in de traditionele behandeling het nuttigheidsaspekt op de voorgrond stond. Nu doen we het anders. Tenslotte is het niet interessant meer om een stuk van de wiskunde in dienst te stellen van het rekenen met potlood, papier en tabel. Het vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en worteltrekken met 'onmogelijke' getallen láát je in deze tijd tenslotte – elektronisch – doen ...... Het begrip logaritme wordt nu geïntroduceerd op basis van het inzicht in isomorfe systemen. Dit betekent dat enerzijds het begrip 'bijektie' en anderzijds het begrip 'systeem' (= verzameling met operatie) een fundamentele bijdrage dient te leveren. Monique heeft dan ook van te voren geoefend in het herkennen en toepassen van eigenschappen van gedefinieerde operaties in gegeven verzamelingen. Daarbij zijn aan eenvoudige voorbeelden de groepseigenschappen onwikkeld, die later weer werden toegepast in verwante situaties.
Ik besluit mijn e.h.b.o. werk dit keer te beginnen bij de bijektieve afbeelding. Het onderstaande plaatje krijgt door middel van enkele bekende voorbeelden 'betekenis':

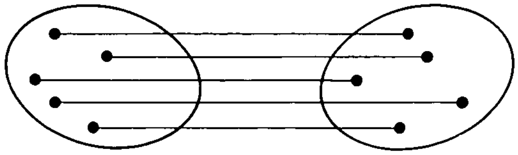


fig. 1.

Daarna bekijken we samen nog even een aantal bekende systemen, zoals $\ulcorner \mathbb{N}, + \urcorner$, $\ulcorner \mathbb{Z}_5, {}^{+}5 \urcorner$ en $\ulcorner \mathbb{Q}, \cdot \urcorner$.
De essentie hiervan geven we ook symbolisch weer:

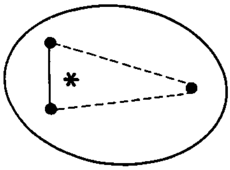


fig. 2.

Waarmee tot uitdrukking wordt gebracht dat $* : A \times A \rightarrow A$.

Het verwondert me dat Monique tot zover heel verstandig mee kan praten. De abstrakte redeneringen op afstand van de konkrete voorbeelden gaan haar goed af.
We zijn nu evenwel gekomen op een punt waar m.i. een nog grotere geestelijke prestatie wordt verlangd. Het gaat er daarbij om inzicht te krijgen in de gelijkheid van twee schijnbaar verschillende strukturen.

Op dit moment herinner ik me mijn eerste lessen op dit terrein in een heroriënteringskursus aan mavo-leraren. De formele definitie in ons boek:

$$f(x * y) = fx \circ fy$$

voor de bijektie f voldeed didaktisch natuurlijk niet. De gelijkheid van de strukturen trachtten we toen zichtbaar te maken d.m.v. de bijbehorende (groeps) tabellen.
Dat zag er dan ongeveer aldus uit:

⊕	E	O
E	E	O
O	O	E

$\ulcorner \{E, 0\}, + \urcorner$
even, oneven in Z

•	P	N
P	P	N
N	N	P

$\ulcorner \{P, N\}, \cdot \urcorner$
pos, neg in Z

$^{+}2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\ulcorner \{0, 1\}, {}^{+}2 \urcorner$
modulo 2

o	D_0	D_π
D_0	D_0	D_π
D_π	D_π	D_0

$\ulcorner \{D_0, D_\pi\}, \circ \urcorner$
draaiingen

fig. 3.

En met behulp van transparanten op de overheadprojektor kun je isomorfie werkelijk laten zien. Voor groepen van hogere orde was het alleen maar lastig om wezenlijk verschillende situaties te bedenken, die dezelfde groepsstruktuur opleveren.

Maar, terug bij Monique, deze keer besluit ik direkt op mijn doel af te gaan. Het voorbeeld, waar alles tenslotte om begonnen is, moet nu maar direkt tot het algemene inzicht bijdragen:

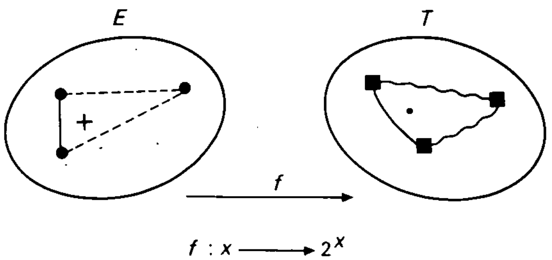


fig. 4.

Opm. Piet Vredenduin wees mij er later op dat ook hier het gebruik van tabelletjes verhelderend werkt:

+	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

E

•	2^1	2^2	2^3
2^1	2^2	2^3	2^4
2^2	2^3	2^4	2^5
2^3	2^4	2^5	2^6

T

Mijn poging om enige 'zin' te geven aan dit stukje wiskunde leidt er toch nog toe dat het nuttigheidsaspekt naar voren komt: 'Optellen gaat eenvoudiger dan vermenigvuldigen, natuurlijk technisch gezien. In T wordt vermenigvuldigd, hetgeen zich in E weerspiegelt in een optelling. Om daar te werken moet je eerst de inverse afbeelding f^{-1} van f toepassen. Nu zijn we er, de funktie $f^{-1}: x \rightarrow {}^{2}\log x$ is geboren ......'.

Door het voorgaande bijlesje in moderne wiskunde werd ik me er weer eens van bewust hoe belangrijk het struktuurkarakter van de wiskunde is. In de derde klas van het atheneum wordt reeds op hoog nivo van abstraktie over strukturen nagedacht. Hoe zit dat nu in het wiskundeonderwijs, dat aan die derde klas vooraf gaat?
Wordt daar ook al aandacht aan strukturen besteed? Is het mogelijk een bepaalde attitude te verwerven, waardoor het zoeken naar strukturen als het ware een tweede natuur wordt?

Welnu, als ik zo in mijn omgeving rond kijk, dan kom ik toch wel diverse situaties tegen waarin mensen op allerlei nivo's trachten om door het aanbrengen van strukturen meer greep te krijgen op hun problematiek.
Dat begint al op heel eenvoudig nivo [1]. In de pedagogische akademie had ik juist de eerstejaarsstudenten ingeleid in het Land van Acht [2]. Vanuit allerlei telsituaties hadden we via het turven en de abacus het achttallige (positionele) stelsel ontworpen. Impliciet – d.w.z. zonder het bewust te maken – was al ruimschoots gebruik gemaakt van nuttige struktureringen in het materiaal.

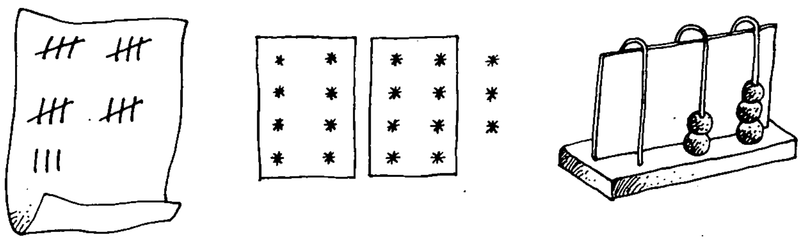


fig. 5.

De studenten maken ook materiaal voor de basisschoolkinderen in het Land van Acht. Een aardige gedachte levert het kralensnoer, de kinderen mogen de kralen zodanig kleuren, dat het aantal ervan gemakkelijk te bepalen is.

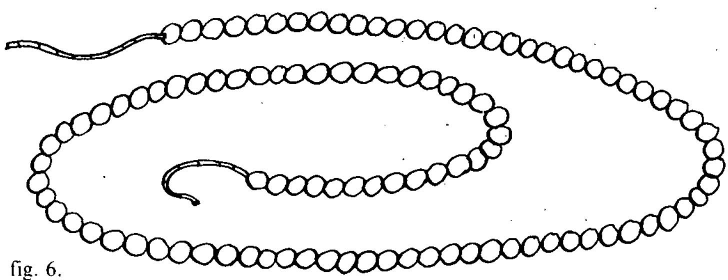


fig. 6.

Inderdaad lijkt het zelf aanbrengen van een bruikbare struktuur in gegeven materiaal met een gegeven problematiek (hier: tellen) een belangrijke aktiviteit.

Marjan, die achttallig de neuzen moet tellen van alle aanwezigen, doet dit kennelijk nog onbewust. Toevallig(?!) zitten de studenten dit keer in mijn lokaal vrij onoverzichtelijk door elkaar.
Ze telt a.h.w. via een spiraal van buiten naar binnen om niemand te vergeten. Sophie, die gevraagd wordt het aantal stoelen in 't lokaal te tellen, brengt een zodanige struktuur aan, dat ze gebruik kan maken van het aantal neuzen.

1 Neen, ik praat niet over de Strukturennota.
2 Zie ook Vakdidaktische Notities nr. 4: konkretiseren.

Bij het bepalen van het aantal stoelpoten ligt de strukturering zo voor de hand, dat de aandacht slechts uitgaat naar het technische probleem van 4 × 34, achttallig.

Voor studenten, maar m.i. ook voor jongere leerlingen, is het van groot belang dat de wijze van strukturering steeds weer bewust wordt gemaakt.
In mijn P.A.-klas wierp dit al wat vruchten af toen een toevallig telprobleem naar voren kwam. Ze moesten thuis elk een stuk van de getallenlijn maken.

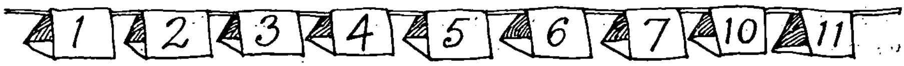


fig. 7.

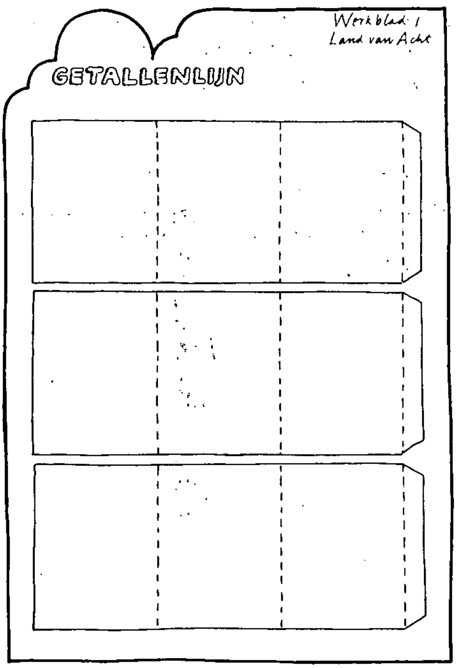


fig. 8.

In elk werkboek zitten nu drie bouwstenen voor deze getallenlijn (zie figuur 8), en iedere student krijgt zijn achttallige nummer. Hiermee moet bepaald worden welke getallen ingevuld dienen te worden. De meeste studenten tellen ijverig uit:

$1 \rightarrow 1, 2, 3$
$2 \rightarrow 4, 5, 6$
$3 \rightarrow 7, 8, 9$

Enkelen doorzien de globale strukturering: $n \rightarrow 3n-2,\ 3n-1,\ 3n$, waarvan het nut door de anderen achteraf zeker als zodanig gewaardeerd wordt.

Een aardig struktureringsprobleem kreeg ik kortgeleden onder ogen: Welke lengte ijzerdraad zit er in een gegeven oppervlak ijzerhek met vierkante openingen: ◇ of in kippegaas met zeshoekige openingen.

Ik zei het al. Deze aandacht voor het bewust struktureren door a.s. onderwijzers staat in het teken van belangrijke wiskundige aktiviteiten op de basisschool. In het Wiskobas-programma* wordt veel gelegenheid gegeven tot het beoefenen van het struktureren. Een analyse van het materiaal laat zien dat 'materiaalfaktoren' hierbij in 't oog springen.
Ik kom hierop graag terug in een volgende vakdidaktische notitie. Het onderwerp lijkt van groot belang als men wiskunde-onderwijs beschouwt met betrekking tot leerlingen van 4 tot 18 jaar.
Leren struktureren, het bewust maken daarvan en het verkregen inzicht weer toepassen op een hoger nivo ..... het schijnen fundamentele menselijke aktiviteiten, die o.a. binnen het wiskunde-onderwijs ontwikkeld kunnen worden. Onderwijsgevenden in kleuterschool, basisschool en voortgezet onderwijs kunnen m.i. samen met betrekking tot dit onderwerp over hun vak spreken.

Monique kwam na het proefwerk uit school met de mededeling dat het wel erg moeilijk was geweest. Ze moest bij de operatie $a*b=a+b-ab$ het neutrale element en de inverse van a uitrekenen. Wat logaritmen betreft werd o.a. gevraagd om x op te lossen uit ${}^{3}\log x = {}^{3}\log 15 + {}^{3}\log 7$.
Tja, waar blijf je dan als wiskunde-vader!?

* Zie Wiskobas Bulletin. leerplanpublikatie 2. dec. 1975: 'Overzicht van Wiskunde Onderwijs op de Basisschool'.

Begin september 1976 ontving de redactie het hierna volgende artikel van de Heer Ir. Y. C. G. Nottrot, bij enkele der oudere lezers misschien bekend door vroegere publicaties, o.a. betreffende de meetkunde in de vierdimensionale ruimte.
Aangezien het artikel nogal groot was en bovendien een onderwerp behandelde dat in de scholen weinig meer aan bod komt (kan komen) was het oordeel van enkele redacteuren, dat niet zonder meer tot opname moest worden overgegaan. Besloten werd de mening van de redactievergadering te vragen. Uit een begeleidende brief bleek dat de Heer Nottrot dit artikel beschouwde als zijn zwanenzang en erg gesteld was op opname.
Niet daarom, maar om de inhoud van het artikel, dat door enkele redacteuren beschouwd werd als een voorbeeld van geïnspireerd wiskundig bezig zijn, werd besloten het artikel op te nemen. Het bericht van deze beslissing heeft de Heer Nottrot niet meer op tijd kunnen bereiken: begin oktober overleed hij op 82-jarige leeftijd. Het was dus inderdaad zijn zwanenzang.

Het ruitentwaalfvlak, koningin der veelvlakken

Ir. Y. C. G. Nottrot †

INLEIDING

Het is in de wiskunde en speciaal in de vlakke en ruimtelijke meetkunde niet gebruikelijk aan bepaalde 'figuren' een eretitel toe te kennen.
Toch zijn er die het tot een zekere vermaardheid hebben gebracht. Als zodanig zijn bijvoorbeeld te noemen de figuur van de Stelling van Pythagoras, die van de Gulden Snede (o.a. het pentagram) en . . . de vijf regelmatige veelvlakken. In vroeger dagen heeft men de eerste al eens in gigantisch formaat op de aarde willen afbeelden, als boodschap in het heelal over de bereikte ontwikkeling van de mens; de tweede heeft in de kunst (bijvoorbeeld bij Le Corbusier) furore gemaakt en de regelmatige veelvlakken werden bij Kepler fundament van zijn conceptie – of fictie – van het planetenstelsel. De dodekaëder, het regelmatig twaalfvlak, verkreeg een extra erepositie.

Een van de kenmerken van de groep der vijf regelmatige veelvlakken is de 'tegengesteldheid' van:

- het viervlak met zichzelf
- het zesvlak met het achtvlak
- het twaalfvlak met het twintigvlak.

Die tegengesteldheid brengt met zich mee dat de partners een gelijk aantal

ribben hebben. Bij gepaste lengteverhouding van die ribben (resp. 1 op 1; 1 op $\sqrt{2}$ en 1 op g; g = het gulden-snede-getal = $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) = 1{,}618\ldots$) kunnen de partners zo worden gekruist, dat hun ribben elkaar loodrecht middendoor delen.
Bij zulk een kruising van 6-vlak en 8-vlak (kubus en oktaëder) markeren de gezamenlijke 14 hoekpunten de hoekpunten van een *ruitentwaalfvlak* (rhombendodekaëder) (ter verkorting voortaan meestal aangeduid met r-12-vl.) en sluiten de 14 zijvlakken samen een *geknotte kubus* (met hetzelfde recht een geknotte oktaëder te noemen) in.
Figuren 1a, b, c.

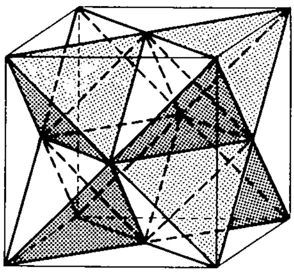


Fig. 1a

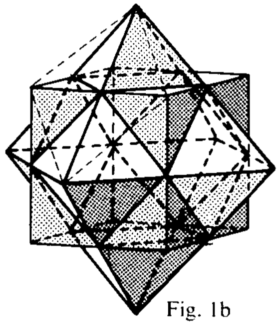


Fig. 1b

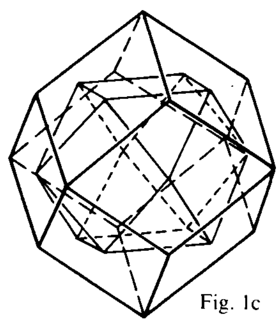


Fig. 1c

Als – op hùn gebied – door fokkers en telers, wordt met dèze kruising een veredeling bereikt. Want hoewel het boeiend is de vijf regelmatige veelvlakken in hun onderling verband te beschouwen, elk voor zich hebben zij, door de zo geprezen gelijkwaardigheid van resp. hun hoekpunten, hun ribben en hun zijvlakken, een zekere geborneerdheid. Daarentegen straalt het r-12-vl. – en in iets mindere mate ook de geknotte kubus – intelligentie uit, hetgeen ik wil laten uitkomen in een considerans voor haar promotie, haar verheffing boven de vijf regelmatige veelvlakken, de prinsessen. Deze mogen haar hofdames wezen. Te lang reeds was zij assepoester.

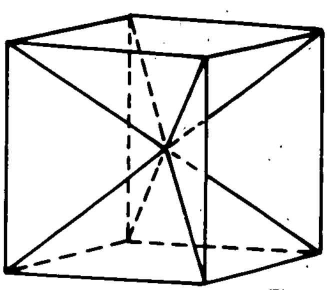
Die considerans, de redenen van het voorstel, leze men in eerste instantie uit de korte punten 1 tot en met 10; de ad-punten geven de nadere toelichting. Ten behoeve van punt 10 moest in 8 en 9 meer uitvoerig op de structuur van een dichtste bollenstapel worden ingegaan. Daarbij blijkt de 'intelligentie' van de geknotte kubus.
Er zijn twee buiten-gebieden waarop het r-12-vl een rol speelt: de vierdimen-

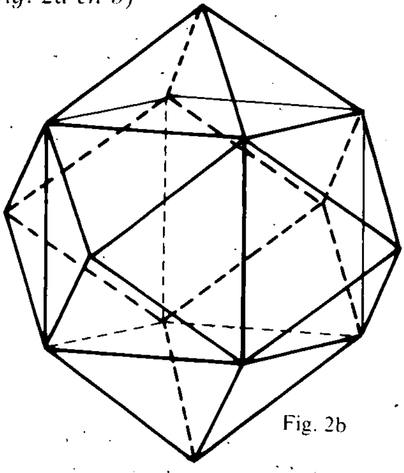
sionale meetkunde en de kristallografie. Ik acht ze te specifiek om hier te betreden.
De ontwikkeling van 'ruimte-visie' dient m.i. een belangrijk doel van het wiskunde-onderwijs te zijn. Een ieder heeft er baat bij, maar zeker as. architecten, beeldende kunstenaars en natuurkundigen. In dit stuk ligt de ruimtevisie op de voorgrond van al hetgeen werd besproken.

1 *Kruising van twee tetraëders brengt kubus en oktaëder voort (fig. 1a), hùn kruising het ruitentwaalfvlak en de geknotte kubus (fig. 1b en c)*

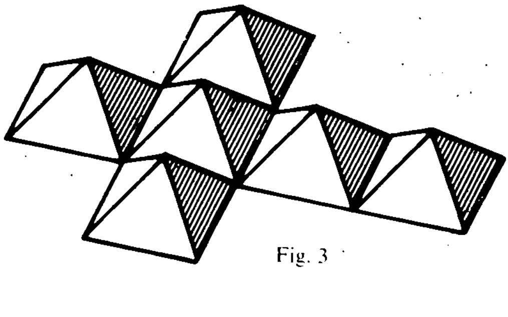
ad 1. Deze kruisingen werden in de Inleiding al besproken. Gelijk daar werd opgemerkt moet bij de tweede kruising de lengteverhouding der ribben 1 op $\sqrt{2}$ zijn.
R-12-vl en geknotte kubus zijn elkaar eveneens tegengesteld.
Uit het geboorteproces van het r-12-vl volgt dat de korte en lange diagonalen van de zijvlakken van het r-12-vl resp. een kubus en een oktaëder omlijsten. De geknotte kubus kan verdeeld worden in zes halve oktaëders plus acht tetraëders, want al haar hoekpunten liggen op ribbe-lengte van het middelpunt (zie punt 8).

2 *Het r-12-vl ontstaat eveneens bij uitstulping van de zes gelijke piramiden, waarin een kubus kan worden verdeeld. (fig. 2a en b)*


Fig. 2a


Fig. 2b

ad 2. Met een uitslag van de in zes piramiden gespleten kubus (fig. 3) vormt men bij omslaan naar bòven de kubus, bij omslaan naar ònder het r-12-vl.


Fig. 3

De kubus is – omdat de standhoek op haar ribben 90° is – het enige regelmatige lichaam, waarbij na de bedoelde uitstulping de opstaande zijvlakken der piramiden paarsgewijs tot vlakke ruiten samen vallen. Enige analogie is er in het platte vlak, waar door 'uitstulping' van een gelijkzijdige driehoek een regelmatige zeshoek, en van een vierkant een vierkant ontstaat.

3 *Ruitentwaalfvlakken kunnen aaneengesloten worden gestapeld (fig. 4)*

ad 3. Dit volgt uit (2). Men denke zich van een normale stapel kubussen de aaneensluitende exemplaren om en om wèl en niet gesplitst in piramiden, welke piramiden tegen de ongesplitste kubussen worden gehecht. Deze worden daardoor tot aaneensluitende ruitentwaalfvlakken.

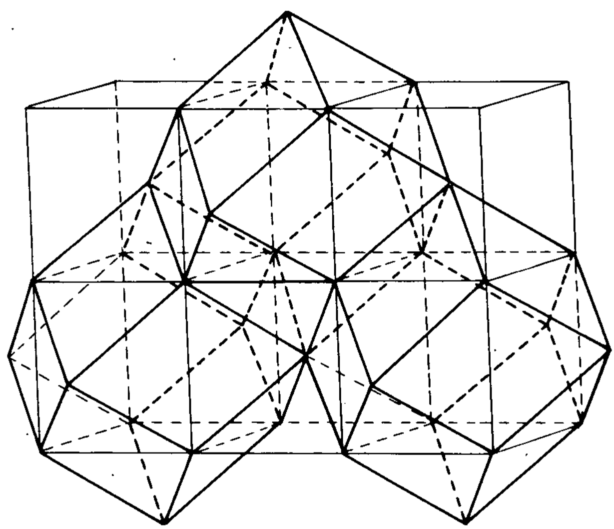


Fig. 4

Met de andere regelmatige veelvlakken kan, elk voor zich, niet aan eensluitend worden gestapeld. Wel met een combinatie 2 op 1 van tetraëders en oktaëders van gelijke ribbe.
Door als in figuur 5 twee tetraëders te plaatsen tegen een paar overstaande zijvlakken van een oktaëder, verkrijgt men een rhomboëder (een r-6-vl). Rhomboeders zijn wèl aaneengesloten te stapelen. (zie ook ad 5)
Ook een combinatie, in gelijk aantal en met gelijke ribben, van geknotte kubussen en oktaëders is 'ruimtevullend'.

4 *Het r-12-vl is op tweeërlei wijze te verdelen in vier rhomboëders, alle acht congruent en met zijvlakken gelijk aan die van het r-12-vl. (fig. 6)*

ad 4. Deze eigenschap vloeit voort uit de unieke bouw van het r-12-vl. Haar

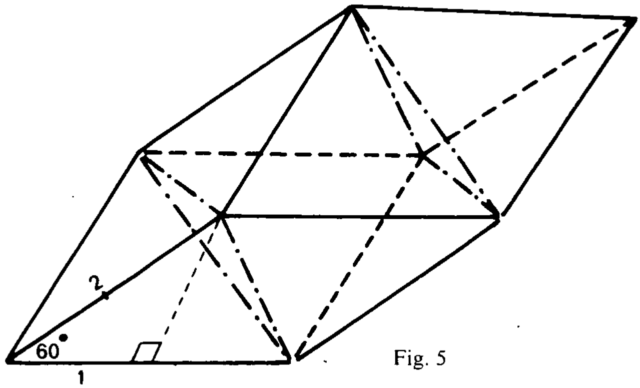


Fig. 5

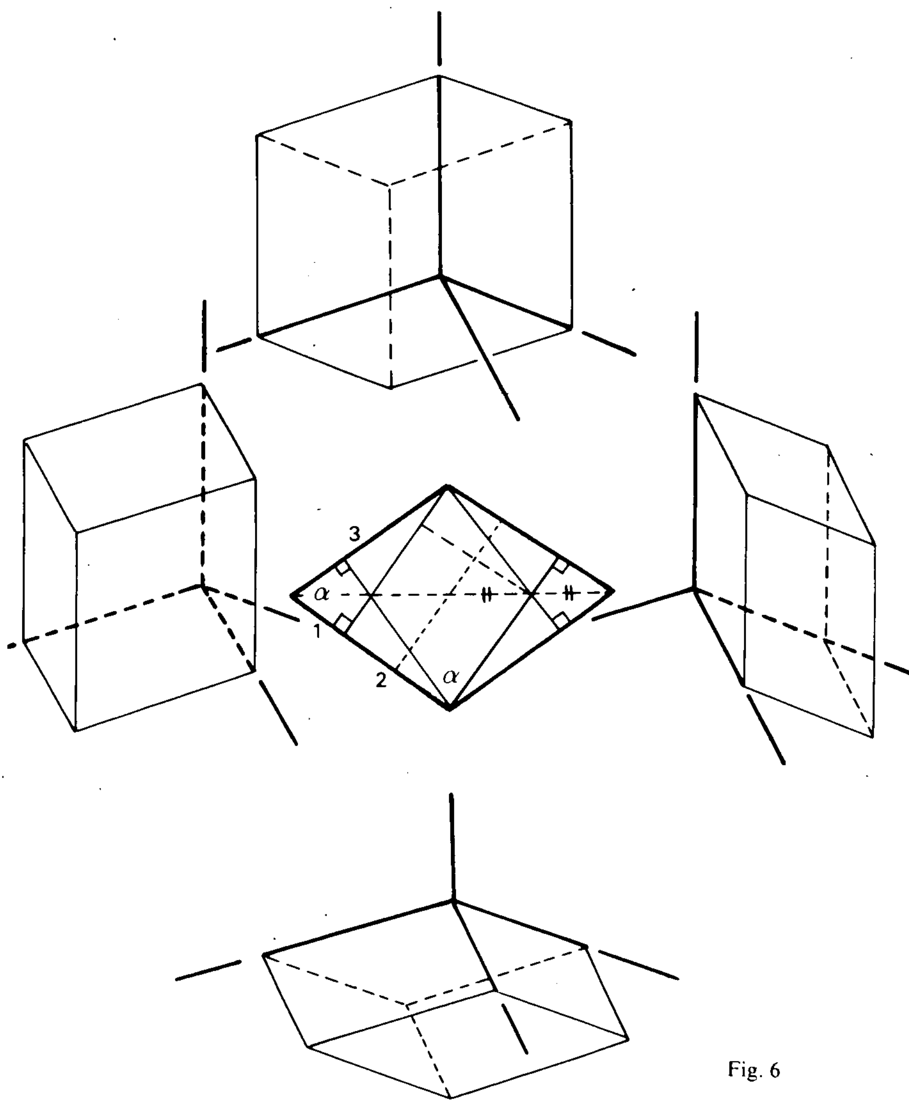


Fig. 6

24 ribben strekken zich bij *zes*tallen in *vier* richtingen uit, evenwijdig aan de lichaamsdiagonalen van de kubus in het r-12-vl.
Dit is t.o.v. de ribben van kubus, tetraëder, oktaëder en geknotte kubus een bijzondere situatie. Want van de kubus wijzen ze bij *vier*tallen in *drie* richtingen, gelijk die van de lichaamsdiagonalen van de oktaëder (fig. 1b) en van de andere drie wijzen ze, – resp. in *enkelvoud*, in *paren* en in *viertallen* –, in *zes* richtingen, overeenkomstig de richtingen van de centrale lichaamsdiagonalen van de geknotte kubus.
Bovendien zijn de bedoelde centrale lichaamsdiagonalen bij de geknotte kubus en het r-12-vl tweemaal zo lang als hun ribben. Dit is mede reden van de geschetste deelmogelijkheid der beide tegengestelde veelvlakken.

5 *In de ruit, het zijvlak van het r-12-vl en haar rhomboëders, snijden de hoogtelijnen elkaar en de lange as op één kwart en de overstaande zijden op één derde van hun lengte (figuur 6 midden). De secans (= 1/cos) van de scherpe hoek van de ruit is dus 3. Deze hoek (70°31′44″) komt eveneens voor in de tetraëder, de kubus en de oktaëder (fig. 7)*

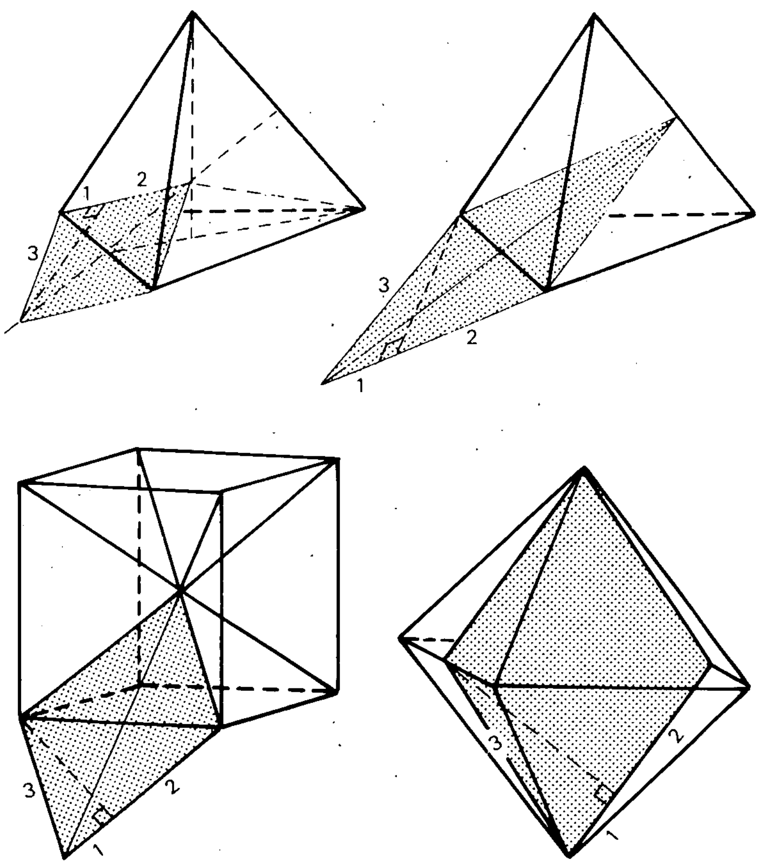


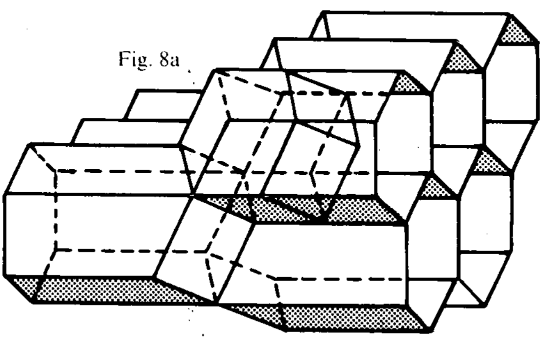
Fig. 7

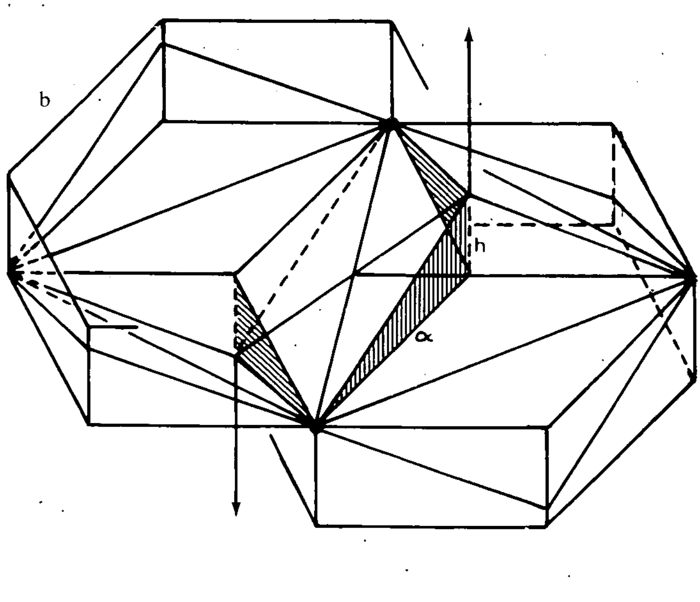
ad 5. Daar de secans van de scherpe hoek 3 is, zal ik ruit en rhomboëder resp. 'sec-3-ruit' en 'sec-3-rhomboëder' noemen. De in ad 3 besproken rhomboëder (fig. 5) en haar zijvlakken zijn dan aan te duiden met 'sec-2-rhomboëder' en 'sec-2-ruit' want sec 60° = 2. Er is een groot verschil in vorm tussen de beide rhomboëders, de 'sec 2' is scherp en lang, de 'sec 3' stomp en plat. Van de vier lichaamsdiagonalen zijn er bij beide drie gelijk, de vierde is bij de sec-2-rhomboëder $\sqrt{3} = 1{,}732$ maal zo lang en bij de sec-3-rhomboëder slechts $\frac{1}{11}\sqrt{33} = 0{,}522$ maal zo lang.
N.B. Een analoge kruising van regelmatig twaalfvlak en regelmatig twintigvlak, als in (1) van kubus en achtvlak, schept een ruiten-30-vlak. De zijvlakken zijn 'tan-2-ruiten' de scherpe hoek is nl. 63°26'6", de verhouding van de diagonalen is *g*, het getal van de gulden snede. (1,618)

6 *Het r-12-vl past met 9 van de 12 zijvlakken tegen de zij- en achtervlakken van een bijencel. (fig. 8a)*
Deze vorm van de scheidingswand tussen vóór en achtercellen vergt voor de bouw van de raat een minimum aan materie. (fig. 8b)

ad 6. In vergelijking met de regelmatige veelvlakken is het reeds een bijzondere

Fig. 8a



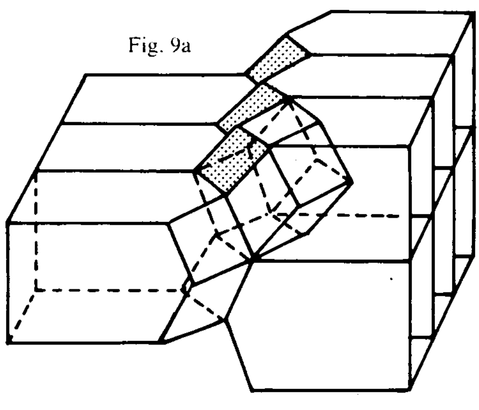


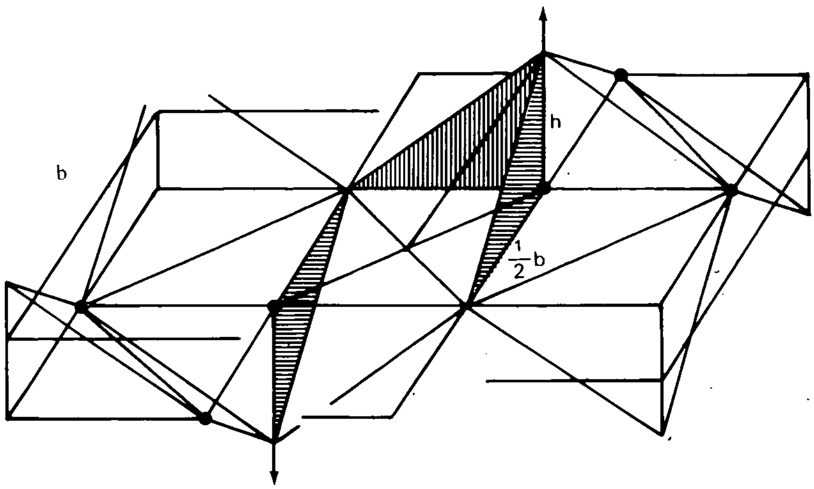
eigenschap van het r-12-vl dat het met 4, resp. 6 zijvlakken passend kan insluiten in buizen van vierkante of regelmatige zeshoekige doorsnede. Het eerste is in drie, het tweede in vier posities mogelijk.
Verrassend is het dat het r-12-vl ook tegen de verdiepte driedelige achterwand van de cel blijkt aan te sluiten. (fig. 8a) Dat dit bovendien met zich brengt dat aldus voor de raat een minimum aan materie (was) wordt gebruikt is als volgt aan te tonen. (fig. 8b) Zoals bekend verspringen vóór- en achtercellen t.o.v. elkaar. Elke cel heeft dus drie achterburen. Een vóór- en achtercel hebben dus slechts $\frac{1}{3}$ van de tussenwand, een ruit dus, gemeen.
Wij gaan uit van een onderstelde situatie dat al deze ruiten samen nog in één plat vlak liggen. Vervolgens wentelen wij de ruiten enigszins om hun lange diagonaal en laten tegelijk de korte diagonalen aan groeien, opdat er geen openingen ontstaan. Er heeft nu enerzijds een bezuiniging op zijwand, anderzijds een vergroting van de ruiten plaats.
Stellen we de zijde van de zeshoek a en de opheffing h, dan laat zich dit uitdrukken in de uit figuur 8b af te leiden formule: $ah - a\sqrt{3}(\sqrt{(h^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a)$.
De waarde hiervan, of wel van $h - \frac{1}{2}\sqrt{(12h^2 + 3a^2)}$ dient maximaal te zijn. Door differentiëren blijkt dat dit het geval is voor $h = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$ hetgeen juist die grootte van h is, waarbij de ruit een 'sec-3-ruit' wordt en zich aanpast tegen de reeds op de zijwanden van de cel aansluitende ruiten van het r-12-vl.
Per cel is nu drie maal $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})a^2 = 0{,}477\, a^2$ minder wand nodig of ruim 18 % van het oorspronkelijk als plat aangenomen grondvlak van de cel (opp. $= 1\frac{1}{2}a^2\sqrt{3} = 2{,}598\, a^2$).

7 Het r-12-vl past met acht van de twaalf zijvlakken tegen de zij- en achtervlakken van een raat met in doorsnede vierkante cellen. (fig. 9a)
Ook nu maakt dan de vorm van de scheidingswand tussen vóór- en achtercellen, dat voor de raat met de minste hoeveelheid bouwstof wordt volstaan. (fig. 9b)

ad 7. Het r-12-vl past nu met vier zijvlakken tegen de daarmee congruente bodemvlakken (fig. 9a). De cellen vóór en achter verspringen weer ten opzichte van elkaar. Elke cel heeft thans vier achterburen.
Om aan te tonen dat ook nu weer een minimum aan materie wordt gebruikt, gaan we wederom uit van een vlakke bodem. Nu verdeeld in vier vierkanten.

Fig. 9a





Als in ad 6 wentelen wij deze in gelijke mate om een diagonaal (zie fig. 9b) en laten de andere diagonaal weer zo aangroeien, dat er geen openingen ontstaan. Dan heeft er enerzijds weer een bezuiniging op zijwand, anderzijds een vergroting van de vierkanten tot slanker wordende ruiten plaats.
Stellen we nu de zijde van de vierkante doorsnede van de cel b en de opheffing weer h, dan laat zich vorengenoemd verband thans samenvatten in de uit figuur 9b af te leiden formule:

$$\tfrac{1}{2}bh - \tfrac{1}{2}b\sqrt{2}(\sqrt{(h^2+\tfrac{1}{8}b^2)} - \tfrac{1}{4}b\sqrt{2}).$$

De waarde hiervan, of wel van $h - \frac{1}{2}\sqrt{(8h^2+b^2)}$ moet maximaal zijn. Differentiatie geeft

$$1 - \frac{4h}{\sqrt{(8h^2+b^2)}} = 0 \text{ dus } h = \tfrac{1}{4}b\sqrt{2}.$$

Deze grootte van h geeft de bodemruiten weer de sec-3 vorm en aansluiting tegen de naar die zijde gekeerde vier zijvlakken van het in de cel geschoven r-12-vl.
Thans is per cel vier maal $\frac{1}{8}(2-\sqrt{2})b^2 = 0{,}293\,b^2$ minder wand nodig d.i. 29,3 % van het oorspronkelijk als plat aangenomen grondvlak van de cel (opp. b^2).
N.B. Afgezien van de verkregen besparing aan materie, maakt de door piramideheuveltjes en -putjes geaccidenteerde tussenwand de raat, zowel die in (6) als in (7), stijver en steviger.

wordt vervolgd

Vectormeetkunde of meetkunde met vectoren

H. A. VAN WELY

In een auteursvergadering werd onlangs gediscussiëerd over bovenstaand onderwerp. De vraagstelling was iets uitgebreider en luidde zo: Als wij – bij het schrijven van leerboeken – gebruik maken van het begrip vector, wat doen we dan eigenlijk?
We weten best hoe het zou moeten, maar we kunnen niet.

De leerling

Laten we eens trachten te redeneren vanuit het standpunt van een (goede) vwo-leerling, die W II gekozen heeft, of in het vierde leerjaar over die keuze nadenkt.
Hij weet dat het begrip vector is geïntroduceerd als een translatie van ....., ja van wat? Al jaren heeft hij gewerkt met een puntverzameling die 'vlak' genoemd werd. In dat vlak – ook wel R_2 geheten – heeft hij allerlei deelverzamelingen leren kennen: punten, rechten, lijnstukken, krommen. Hij heeft met deze deelverzamelingen allerlei toeren uitgehaald en is daarin heel ver gegaan. Hij heeft zelfs geleerd te praten over gelijke lengten en over loodrechte standen, fysische begrippen dus, die eigenlijk niets te maken hadden met de opzet van dat wat de leraar 'moderne wiskunde' noemde en waarvan beweerd werd dat werd uitgegaan van de verzamelingenleer. Genoemde leerling weet niet dat er in twee 'ruimten' wordt gewerkt, namelijk in een 'puntruimte' (zijn R_2) en in een daarmee geassocieerde 'vectorruimte' (veelal V_2 genoemd). Misschien is het hem niet ontgaan dat zekere afbeeldingen van R_2 (translaties) werden vertaald als vectoren in die V_2. Voor hem is een vector een gericht lijnstuk in R_2. Wel heeft hij een vaag idee van zekere wetten, die voor vectoren gelden en waarvan hij zich afvraagt: zijn die wetten opgelegd, of volgen ze uit de eigenschappen van die R_2? Maar waar heeft hij die laatste vandaan? Zijn dat fysische werkelijkheden?
Tot zover de leerling.

Verzamelingen

Als een leek – een ouder bijvoorbeeld – met je praat over de schoolwiskunde

van vandaag, dan valt na tien seconden de uitspraak: 'Jullie doen daar alles met verzamelingen, hè?'
Dat is zo ongeveer de neerslag van dat wat de leerlingen over de inhoud van hun wiskundelessen kwijt willen. Onze reactie op zo'n gezegde is zo ongeveer: 'Ja zeker, maar besef wel dat een verzameling waarvan de elementen niets met elkaar te maken hebben niet erg interessant is!' We willen dan nog wel uitleggen dat we eigenlijk verzamelingen *maken* waarvan de elementen twee aan twee met elkaar reageren en dat we deze reacties aan bepaalde wetten laten gehoorzamen. Dat we dus scheppende arbeid verrichten.
Verder komen we meestal niet met ons betoog.

De lineaire vectorruimte

Zo'n schepping is de lineaire vectorruimte.
Het hele probleem is echter dat ons nederlandse vwo-programma noch de juiste voorbereiding tot dit begrip, noch voldoende tijd voor de behandeling toelaat. Toch willen we modern doen en dan kun je het vectorbegrip niet missen, menen we. In het programma staan nu eenmaal de woorden vector, norm, inwendig produkt e.d. expressis verbis vermeld. Er de leerling van te overtuigen dat in een lineaire vectorruimte niet 'getekend' kan worden, alleen 'gerekend' is een niet-haalbare kaart.

Hoe moet het nu?

In elk leerboek dat in Nederland verschijnt wordt geworsteld met de vraag: hoe gebruiken we de vector in de meetkunde? En hier is 'meetkunde' het manipuleren met intuïtieve en deels aan de fysica ontleende dingen als punten, lijnen en vlakken. Zo'n model is bij de leerling na enige jaren wel zowat aanwezig. Hij heeft een soort idee van wat een R_2 is en zelfs een R_3. Wij, leraren, moeten ons over dit besef verheugen en daarop inhaken. Door de inwerking van onze lessen heeft de leerling van klas 4 onbewust een soort axiomatiek opgebouwd, waarin zelfs zijn begrip van het reële getal een rol speelt. Hij heeft echter niet begrepen dat deze axiomatiek de regels van het spel zijn! Dat is jammer maar onvermijdelijk. We willen die regels niet op een rijtje zetten, daarvoor ontbreekt ons, zeggen we, de tijd. Maar er is ook iets anders.
Wij, boekenschrijvers en leraren, programmamakers en inspecteurs (verzamelingen met niet-lege doorsneden), mikken op een heel ander doel dan structuur-denken, hoewel dit denken toch kenmerkend is voor 'moderne' wiskunde. Wat wij willen (of waar we noodgedwongen terecht komen) is een eindexamen vwo waar problemen worden voorgelegd die in wezen niet zo veel verschillen van die van 1938. Ze hebben een ander jasje aan. Het is de oude hap in na-oorlogs battle dress. We gebruiken vectoren! En hoe!
Ja, hoe?

Vectoren als gerichte lijnstukken

Laat ons proper arbeiden.
Goed, een vector is een translatie van het vlak of van de ruimte en we stellen die voor als een lijnstuk waarvan het beginpunt *o* (oorsprong) heet en het eindpunt een pijl draagt. We praten even over de transitiviteit van de ekwipollentie en we zijn klaar. De lijn kan in vectorvoorstelling worden gebracht. Wat we doen is het op-elkaar-leggen van de R_2 en de gevisualiseerde V_2. Dat is in de gegeven omstandigheden een goede zaak. We kunnen nu noteren: $O(\vec{o})$ en $OP(\vec{p})$ en we kunnen de wetten in de vectorruimte in zekere zin verifiëren met behulp van datgene wat we 'weten' van onze R_2. Het woord vectorruimte kan zelfs vervallen. Wel moeten we die wetten, vind ik, op een rijtje zetten. Hoe willen we anders bewijzen: $\lambda\vec{a} = \vec{o} \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \vec{a} = \vec{o}$?
Nu ligt de weg open naar begrippen als onafhankelijkheid van vectoren, basis en kentallen van een vector.

Het inprodukt

Hoe voeren we dit in? Met de beroemde cosinus-uitdrukking? Maar dan heb je het begrip norm nodig. Het begrip loodrecht ook, maar dat is nog niet zo'n bezwaar, want dat behoort tot de intuïtieve bagage.
Of is norm en lengte hetzelfde? Voorlopig niet. Te abstract? Kom, straks komen de orthonormale bases (assenstelsels) en dan krijgen we weer grond onder de voeten.

Het inprodukt dus als bilineaire vorm:
Aan elk tweetal vectoren in R_2 (ja, in R_2!) is een reëel getal toegevoegd, inprodukt genaamd; zijn die vectoren ten opzichte van een gekozen basis

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}: \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

dan is het inprodukt van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk aan:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = pa_1b_1 + qa_1b_2 + ra_2b_1 + sa_2b_2,$$

waarin *p*, *q*, *r* en *s* reële getallen zijn.
Kiezen we $(p, q, r, s) = (1, 0, 0, 1)$, dan heet de basis orthonormaal. Dan is

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1 \text{ en } (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$$

en we *tekenen* die basis als twee onderling loodrechte en even lange pijlen. Nu dekken de begrippen norm en lengte elkaar en nu is de verbinding van onze (R_2, V_2) met de ervaringswereld van vroeger hersteld. We kunnen nu 'meten'!

Afbeeldingen

Obligaat is natuurlijk een definitie van het begrip lineaire afbeelding. Dan zal het grote woord eruit moeten komen: er zijn afbeeldingen die het inprodukt respecteren en er zijn er die dat niet doen. Doen ze het wel, dan noemen we ze orthogonaal. Van de orthogonale groep zullen we maar zwijgen. Wel zal eerst wat matrixrekening moeten worden gedaan. Dat vereenvoudigt het rekenwerk. We laten de leerling zien dat de afbeeldingsmatrix kolomsgewijs de beelden van de basisvectoren aangeeft.
Nu is het moment aangebroken om aan te tonen dat de gegeven definitie van het inprodukt gelijkwaardig is met de vroegere cosinus-definitie. De kring is gesloten!

De oogst

Die kan nu worden binnengehaald: de formules voor sin $(a \pm b)$ en cos $(a \pm b)$ door middel van matrixprodukten, de isometrieën, homothetie, gelijkvormigheid en ga maar door. Alles pure metriek. Het eindexamen is in zicht. De vraagstukken betreffen bijna zonder uitzondering metrische situaties. We hebben bereikt wat we in de gegeven omstandigheden konden bereiken. We hebben meetkunde bedreven met vectoren! Voor de term 'vector' zouden we eigenlijk een ander woord moeten bedenken. Maar dat zou te veel fantasie vragen, wellicht.
Meetkunde met ....., vul zelf maar in.

Waarom gemakkelijk als het ook moeizaam kan? of waarom nu de regel van Simpson niet in M.O.?

FRANK LAFORCE

Als Jan door zijn leraar het volgende hapje voorgeschoteld krijgt:

'Bereken $\int_1^5 x\sqrt{(x^2+4x)}\,dx$', zijn er verschillende reacties mogelijk; van de meest negatieve 'hij kan me de pot op', via 'als het dan toch moet', 'denkt hij soms dat ik dat niet kan' tot 'lijkt een fijne oefening'.

Jan veronderstelt wel dat zijn leraar wel zo eerlijk is hem niet voor een onoplosbaar probleem te zetten (bv. $\int_0^{a/2} \sqrt{(1+\cos^2 x)}\,dx$).

Jan weet ook al door voorbeelden uit de natuurkunde en andere wiskunde-gebruikende wetenschappen, dat bepaalde integralen wel zinnig zijn en dat de cursussen van de burgerlijke ingenieurs er vol mee staan. Die oefening kan er best ergens instaan, en anders is het een trainingsoefening. Dus Jan schiet aan het werk.

Na heel wat inspanning vindt hij tenslotte:

$$\int_1^5 x\sqrt{(x^2+4x)}\,dx = \left[\frac{x^2+x-6}{3}\sqrt{(x^2+4x)}+4\ln|x+2+\sqrt{(x^2+4x)}|\right]_1^5 =$$

$= 24\sqrt{5}+4\ln(7+3\sqrt{5})+\frac{4}{3}\sqrt{5}-4\ln(3+\sqrt{5})$ wat na nog een boel gereken en gejongleer met tafels iets geeft als 60,496....

Juist als hij zuchtend de pen neerlegt, komt zijn acht jaar oudere neef Piet binnen. Piet is ingenieur, sinds kort verbonden aan een studiedienst.

Jan laat aan zijn neef de oefening zien, die zegt:

'Ja, dat is nu het verschil tussen een ingenieur en een wiskundige. De ingenieur rekent, de wiskundige zoekt de primitieve functie – die hij uiteindelijk niet nodig heeft – en vindt dan het resultaat 60,5, het enige dat telt.'

'Mooi gezegd ingenieur, maar hoe kom jij dan aan dat resultaat?'

'Nou, bijvoorbeeld, benaderend, met de regel van Simpson.'

'Leg dat eens uit, en pas het eens toe op deze opgave.'

'Het bewijs zal ik je morgen geven, ik moet dat nog eens opfrissen.'

Stel dat je moet berekenen: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Verdeel het interval $[a, b]$ in een even aantal, n, gelijke deelintervallen, en stel

$\frac{b-a}{n} = h$. Je berekent nu achtereenvolgens de functiewaarden $f(a)$, $f(a+1h)$, $f(a+2h), \ldots, f(a+nh) = f(b)$.

Nu luidt de regel van Simpson:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4(f(a+h)+f(a+3h)+\ldots+f(a+(n-1)h))+$$
$$+2(f(a+2h)+f(a+4h)+\ldots+f(a+(n-2)h))]$$

'Nou, Piet, dat ziet er niet zo mooi uit als n nogal groot wordt.'
'Juist, maar je kan eerst eens beginnen met bv. $n = 4$ en eens zien wat je krijgt.'

$$h = \frac{5-1}{4} = 1$$

Dus

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \tfrac{1}{3}[f(1)+4f(2)+2f(3)+4f(4)+f(5)] =$$
$$= \tfrac{1}{3}(\sqrt{5}+8\sqrt{3}+12\sqrt{21}+32\sqrt{2}+15\sqrt{5}) = 60{,}498\ldots$$

'Dat is praktisch dezelfde uitkomst, met veel minder gereken en geen moeilijke integraal te zoeken. Maar ... we kenden de uitslag al. Hoe weet je nu of je een voldoende benadering gevonden hebt?'
'Eerst, Jan, met een computer speelt de grotere n geen rol, en ten tweede probeer het nog eens met $n = 8$. Zie je weinig verschil, dan zit je wel safe.'

$$\frac{0{,}5}{3}[f(1)+4(f(1{,}5)+f(2{,}5)+f(3{,}5)+f(4{,}5))+2(f(2)+f(3)+f(4))+$$
$$+f(5)] = 60{,}497\ldots$$

'Toch nog heel wat gereken, Piet. En ik kan niet aan een computer.'
'Met een zakrekenmachientje kun je die vele berekeningen al heel vlug en gemakkelijk uitvoeren.'
'Ik spaar voor zo'n toestelletje en koop ik er een, dan moet je me helpen kiezen.'
'Morgen breng ik mijn zakrekentoestel mee, dat is wel een wat duurder, want het is programmeerbaar, en dan zullen we die integraal van jou eens in enkele minuutjes laten uitrekenen, voor bv. $n = 100$.'

De volgende avond.
Piet had een HP 25 bij zich en toetste daarop het volgende programma in:

on en prgm

```
01 RCL 0        07 4          13 sst         19 g x < 0
02 STO +1       08 ×          14 sst         20 gto 35
03 RCL 1        09 +          15 STO 4       21 g x = 0
04 ↑            10 f √        16 1           22 gto 38
05 g x²         11 ×          17 STO +5      23 RCL 3
06 f last x     12 gto 15     18 RCL 5       24 RCL 1
```

```
25 f x < y
26 gto 43
27 RCL 4
28 STO +2
29 RCL 0
30 STO ×2
31 3
32 STO ÷ 2
33 RCL 2
34 gto 00
35 RCL 4
36 STO +2
37 gto 01
38 4
39 STO ×4
40 RCL 4
41 STO +2
42 gto 01
43 2
44 STO ×4
45 RCL 4
46 STO +2
47 2
48 STO -5
49 gto 01
run
```

f fix 6

$h = \frac{4}{100} = 0.04$ STO 0

$a - h = 1 - 0.04 = 0.96$ STO 1

$b = 5$ STO 3

-2 STO 5

f prgm R/S.

De stappen 04 tot en met 14 dienen voor de te integreren functie.
De stappen 31, 32, 33 nl. de vermenigvuldiging van de som met $\frac{1}{3}h$ kan ook achteraf gebeuren, zodat, bij opschuiven er nog 3 stappen meer ter beschikking staan voor de functie, hetgeen meestal ruim volstaat.
In geheugen 5 zit ofwel -1 en dan nemen we eenmaal de functiewaarde op, ofwel 0 en dan wordt het viermaal de functiewaarde, ofwel $+1$ en dan is het tweemaal, behalve als de veranderlijke aangegroeid is tot b. Dan mag $f(b)$ maar eenmaal genomen worden en stopt de loop.

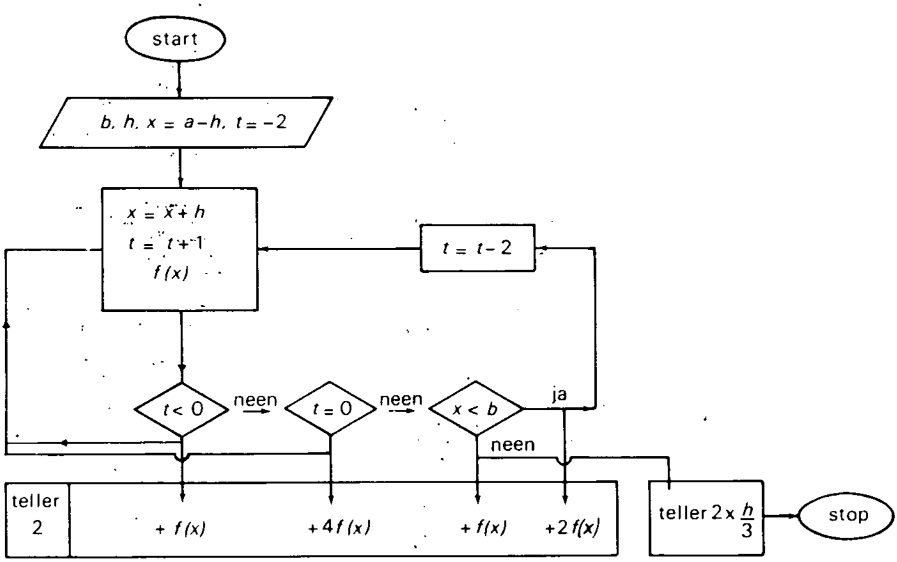


Fig. 1

Voor $n =$	100 vinden we	60,496750.
$n =$	10	60,496805
$n =$	8	60,496878
$n =$	4	60,498341

'Piet, dat is fantastisch, maar het zal wel een hele tijd duren eer ik zelf zo'n programma kan opstellen.'
'Natuurlijk, Jan, een beginneling pianist gaat ook niet meteen Chopin vertolken. En met een goed gewoon rekenmachientje kun je, zoals je zag voor $n = 4$ en $n = 8$, ook al heel wat bereiken. En als je dat toestelletje de baas bent zal later het overstappen naar een programmeerbaar weinig problemen scheppen. En dat is dan weer een goede aanloop naar de echte computers.'
'Nu gaan we eens kijken hoe we aan die regel van Simpson geraken. We nemen eenvoudigheidshalve aan dat $a < b$ is en dat $\forall x \in [a, b] : f(x) > 0$.

Dan weet je dat we $\int_a^b f(x)dx$ kunnen beschouwen als het maatgetal van de oppervlakte begrepen tussen de x-as, de kromme en de rechten $x = a$ en $x = b$. Een eerste benadering zouden we vinden door die oppervlakte te vervangen door de som van de oppervlakten van de twee rechthoekjes zoals in figuur 2.

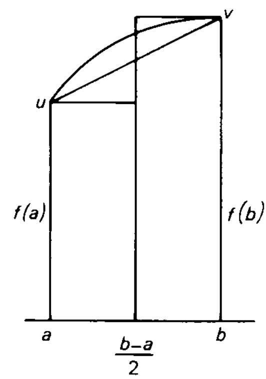


Fig. 2

We zien dat dit hetzelfde is als de oppervlakte van het trapezium *abvu*.
Door *ab* in vele gelijke deelintervallen te verdelen en dan telkens de oppervlakten van al die trapezia op te tellen vindt men een goede benadering. Deze werkwijze draagt de naam van de trapeziumregel.
Simpson meende dat als men zo een trapezium verving door het vlakstuk onder de parabool door de punten $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, $(b, f(b))$ en met symmetrie-as evenwijdig met de y-as, hij een betere benadering had.

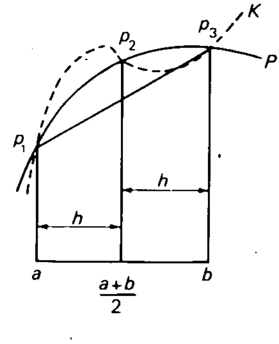


Fig. 3

We vervangen de boog $p_1p_2p_3$ van de kromme K door die van de parabool P. De gezochte oppervlakte verandert niet, als we de abscissen kiezen, zoals op figuur 4.

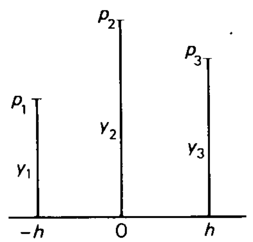


Fig. 4

'Een mooie herhaling van de leerstof uit het 4de jaar M.O., Jan!'

$$\begin{aligned} \text{Zij } y &= Ax^2+Bx+C \\ y_1 &= Ah^2-Bh+C \\ y_3 &= Ah^2+Bh+C \\ y_2 &= C \end{aligned} \quad \text{of} \quad \begin{aligned} A &= \frac{y_1-2y_2+y_3}{2h^2} \\ B &= \frac{y_3-y_1}{2h} \\ C &= y_2 \end{aligned}$$

$$\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+C)\mathrm{d}x = \left[\frac{A}{3}x^3+\tfrac{1}{2}Bx^2+Cx\right]_{-h}^{h} = \frac{2A}{3}h^3+2Ch =$$

$$= \frac{h}{3}(y_1+4y_2+y_3)$$

Verdelen we het interval $[ab]$ in n (even) gelijke delen en noemen we $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n$ de functiewaarden voor $x = a, a+h, a+2h, \ldots,$
$a+(n-1)h,\ a+nh = b$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+h} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a+h}^{a+2h} f(x)\mathrm{d}x+ \ldots + \int_{a+(n-1)h}^{b} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)+\frac{h}{3}(f_2+4f_3+f_4)+\ldots+\frac{h}{3}(f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n) \text{ of}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{3}[f_0+4(f_1+f_3+\ldots+f_{n-1})+2(f_2+f_4+\ldots+f_{n-2})+f_n]$$

'En dat, Jan, is nu de veel gebruikte regel van Simpson'.
'Nu kan ik ook die bepaalde integralen (elliptische) oplossen, waarvan onze leraar zegt dat zij geen stamfunctie hebben'.

Enkele dagen later vraagt Jan aan zijn leraar wiskunde of hij de regel van Simpson mocht gebruiken, en waarom ze die niet in de klas leerden. De leraar antwoordt dat de regel invoeren en bewijzen wel zou gaan, en ze toepassen op

enkele voorbeeldjes ook, maar dat juist de vele berekeningen een stokje in de wielen steken.
Als Jan dan enthousiast vertelt hoe hij samen met Piet gewerkt heeft is zijn leraar vol aandacht.
'Nog enkele jaartjes geduld, Jan, dan hebben ofwel alle leerlingen een zakrekentoestel, of beschikken we er in de klas over en misschien zelfs over programmeerbare.
Maar onbepaalde integralen hebben we nog altijd nodig o.a. bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Maar dat onderwerp staat (gelukkig?) niet op het programma M.O. (in Vlaanderen).'

De verspreiding van de zakcomputers zal een nieuwe revolutie in het wiskundeonderwijs veroorzaken, meer tijd laten voor de problemen zelf, en een nieuwe aanpak daarvan mogelijk maken, en ons onderwijs ook levensechter maken.

Bibliografie

Raymond Broeckx. Programmeerbare Zakrekenmachines, Wiskunde en Onderwijs nr. 7. 3–17
G. Stephenson. Mathematical Methods for Science Students. Longman-London
Allen. Mathematical Analysis for Economists. Macmillan-London
G. A. Vonck. Numerieke Wiskunde voor het V.W.O., I.O.W.O. Utrecht.

Nederlandse wiskunde olympiade 1977

Tweede ronde: vrijdag 2 september 1977, 13.00-16.00 uur.

1 Op een plein staat een monument dat is opgebouwd uit meer dan duizend gelijke kubussen. Het monument is een massief rechthoekig blok met een vierkant grondvlak. De buitenste laag kubussen is verweerd en wordt daarom vervangen. Het aantal kubussen dat vervangen moet worden is precies de helft van het totale aantal. Uit hoeveel kubussen bestaat het monument?

2 Vier masten staan op een vlak horizontaal stuk land op de hoekpunten van een vierkant $ABCD$. De hoogte van de mast op A is 7 m, de mast op B 13 m, en de mast op C 15 m. Binnen het vierkant bevindt zich op de grond een punt P dat even ver afligt van elk van de toppen van deze drie masten.

 a Welke lengte moeten de zijden van het vierkant minstens hebben opdat dit mogelijk is?

 b De afstand van P tot de top van de mast op D is gelijk aan de afstand van P tot elk van de toppen van de drie andere masten. Bereken de hoogte van de mast op D.

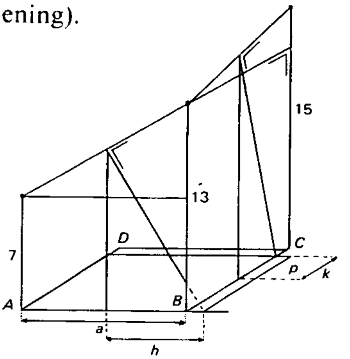
3 Uit elk zevental positieve gehele getallen kan men een aantal kiezen waarvan de som een zevenvoud is. Bewijs dit.

4 In een vlak ligt een even aantal punten. Geen drietal ervan ligt op één rechte lijn. De helft van de punten is rood, de andere helft is blauw. Bewijs dat er een verbindingsrechte van een rood en een blauw punt bestaat, zo, dat in elk van de door die rechte begrensde halfvlakken het aantal rode punten gelijk is aan het aantal blauwe punten.

Oplossingen

1 Stel de zijde van het grondvlak op $(x + 2)$, en de hoogte van het blok op $(y + 1)$ kubussen. Dan geldt $2x^2y = (x + 2)^2(y + 1)$, ofwel
$y[(x - 2)^2 - 8] = (x + 2)^2$.
Omdat $y \geqq 1$ moet $(x - 2)^2 - 8 > 0$ dus $x \geqq 5$.
De waarde $y = 1$ is dus onmogelijk.
Voor $x \geqq 13$ is $(x + 2)^2 < 2[(x - 2)^2 - 8]$, dus er moet gelden $5 \leqq x \leqq 12$.
$x = 5$ geeft $y = 49$.
Het totale aantal is dan $49 \cdot 50 = 2450$ kubussen. $x = 6$ geeft $y = 8$ met als totale aantal $64 \cdot 9 < 1000$.
Controle geeft verder geen gehele oplossingen.
Het monument bevat dus 2450 kubussen.

2 *a* We werken met middelloodvlakken (zie tekening).



$$\frac{h}{\frac{1}{2}(7 + 13)} = \frac{13 - 7}{a}, \text{ dus}$$

$ha = 60$ en

$$\frac{k}{\frac{1}{2}(15 + 13)} = \frac{15 - 13}{a}, \text{ dus}$$

$ka = 28$. Er moet gelden $h \leqq \frac{1}{2}a$, en $k \leqq \frac{1}{2}a$, dus $a^2 \geqq 120$ en $a^2 \geqq 56$. Nodig en voldoende is dus $a \geqq \sqrt{120}\, m$.

b Met dezelfde methode vindt men voor de hoogte van de mast op D: $\sqrt{105}\, m$.

3 Stel $a_1, \ldots, a_7 \in \mathbb{Z}^+$.
Indien geen van de 7 sommen $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ een zevenvoud is, geven minstens twee van hen dezelfde rest bij deling door 7. Hun verschil voldoet aan de gestelde voorwaarden.

4 Er is een verbindingslijn van twee punten zo, dat alle andere punten aan één kant van die lijn liggen. Hebben die twee punten verschillende kleur, dan zijn we klaar. Stel daarom dat ze dezelfde kleur, bv. rood hebben. Wentel nu de lijn om één van deze beide punten rond over een hoek π zo, dat de halfrechte die vanuit het rotatiecentrum in de richting van het andere rode punt loopt, alle punten passeert. Hierbij houden we het aantal blauwe minus het aantal rode punten bij, dat op een bepaald moment is gepasseerd. Dit aantal is in het begin 0 (de 'randpunten' tellen we niet mee) en aan het einde $+2$. Omdat dit aantal telkens met $+1$ of -1 verspringt, moet het op zeker moment voor het eerst de waarde $+1$ bereiken.
De lijn passeert dan juist een blauw punt, en voldoet aan de gestelde eisen.

Uitslag tweede ronde
Aantal deelnemers: 90
Puntenverdeling: opgaven 1 en 2 elk 20, opgaven 3 en 4 elk 30.
Aantal deelnemers met 4 (nagenoeg) goede oplossingen: 2
Aantal deelnemers met 2 (nagenoeg) goede oplossingen: 2
Opgave 4 en 8 (vrijwel) volledige oplossingen en 2 gedeeltelijke.
Opgave 3 had 10 (vrijwel) volledige oplossingen.
Opgaven 1 en 2 hadden wat betere resultaten.
Een niet bedoelde interpretatie van opgave 1 gaf geen puntenaftrek.

Aantal punten	*Aantal deelnemers*
0–10	38
11–20	17
21–30	16
31–40	6
41–50	8
meer dan 50	5

Prijswinnaars

1. Hans Mulder, 100 (eerste ronde 33 uit 33), Chr. Lyceum, Veenendaal (docenten wiskunde: mej. N. H. Visser en H. Bolt)**
2. Marc van Leeuwen, 98, Erasmus College, Zoetermeer (C. Hendriks)**
3. Jan Herman Veldkamp, 62 (19), Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen (F. Goldschmeding)
4. Peter Wagemans, 58 (19), St. Montfort, Rotterdam (I. J. J. Claessens)
5. Frank Hoogeveen, 52 (30), Hervormd Lyceum West, Amsterdam (D. v.d. Kooi)**
6. Marijn Franx, 49 (33), Lorentz Lyceum, Eindhoven (B. Groeneveld)*
7. Rob Potting, 48 (30), Augustinianum, Eindhoven (J. C. v. Uden)
8. Wim Kernkamp, 48 (27), Gymnasium Erasmianum, Rotterdam (J. Smit)
9. Gerrit Boersma, 47 (23), Bogeman College, Sneek (A. Koudenberg)*
10. Robert Jan Kooman, 46 (19), Sted. Lyceum en HAVO (H. Recker)

* Deze deden voor de tweede maal mee aan de tweede ronde.

** Deze deden mee aan de Internationale Wiskunde Olympiade 1977 in Belgrado.

Korrel

Een leerzaam leergesprek

Op een bijeenkomst van didactiekdocenten kregen we de opdracht op grond van een uitgereikte tekst een lesvoorbereiding te maken. De tekst ging over de definitie van continuïteit.
In de tekst werd van een tweetal voorbeelden uitgegaan om de betekenis van continuïteit duidelijk te maken. Deze waren de twee functies van ℝ naar ℝ

$$f : x \to x^2$$

en

$$g : x \to x\mathrm{E}(x) \text{ waarin E de entierfunctie voorstelt.}$$

De grafieken van deze functies zijn

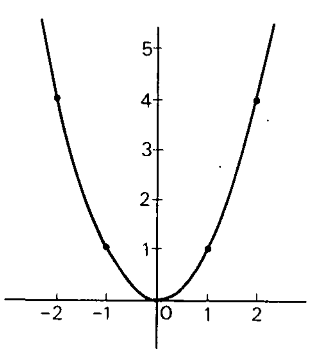


Fig. 1

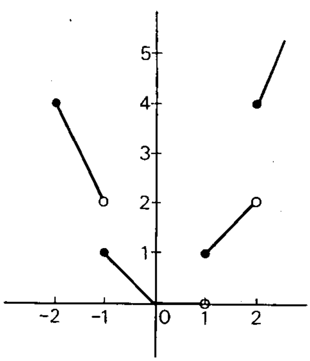


Fig. 2

Waar het om gaat, is nu wel duidelijk. De linker functie is continu, de rechter niet. De leerlingen moeten ertoe gebracht worden het verschil tussen de twee functies (grafieken) onder woorden te brengen en ten slotte tot een aanvaardbare definitie te komen. Voor de hand ligt, dacht ik, een leergesprek dat zo ongeveer als volgt verloopt.
Lr. Wat is het verschil tussen de linker functie (grafiek) en de rechter? Probeer het eens onder woorden te brengen.

Ll. De rechter maakt telkens een sprongetje en de linker gaat gewoon door.
Lr. Goed. Maar we moeten er wiskunde van maken. Een sprongetje, wat is dat?
Ll. Bijv. links van 2 is hij zo ongeveer 2 en dan wordt hij plots 4.
Lr. Je kijkt dus naar origineel en beeld in de buurt van 2. Als het origineel in de rechter grafiek van 1,8 naar 2,2 gaat, wat gebeurt er dan met het beeld?
Ll. Dan gaat het beeld van 1,8 naar 2. Maar het wordt geen 2. Het wordt plotseling 4 en gaat dan verder naar 4,4.
Lr. Goed. En in de linker grafiek?
Ll. Als daar het origineel gaat van 1,8 naar 2,2, dan gaat het beeld van $1{,}8^2$ naar $2{,}2^2$, zonder iets over te slaan.
Lr. Klopt. Nu nog een beetje mooier zeggen. Het origineel loopt van 1,8 naar 2,2. Het doorloopt dus een interval. Wat is in de linker grafiek het beeld van dit interval?
Ll. Het interval van $1{,}8^2$ tot $2{,}2^2$.
Lr. Goed. En in de rechter grafiek?
Ll. Daar bestaat het beeld uit twee stukken. Het interval van 1,8 tot 2 (zonder 2) en het interval van 4 tot 4,4.
Lr. Zie je nu het verschil?
Ll. Ja. In de linker figuur is het beeld van een interval om 2 weer een interval, in de rechter niet.
Lr. Men zegt nu, dat de linker functie in 2 continu is en de rechter niet. Kan je nu precies zeggen, wat het betekent, dat de functie f in 2 continu is?
Ll. Dat betekent dat een interval om 2 als beeld weer een interval heeft.
Lr. Goed. Maar er zit nog een klein addertje onder het gras. Kijk eens naar de rechter functie. Dacht je dat die in 1,9 continu is?
Ll. Ja, daar wel.
Lr. En een interval om 1,9, heeft dat als beeld weer een interval?
Ll. Dat hoeft niet. Je mag de 2 niet voorbijkomen. Je moet dus om 2 een interval nemen dat klein genoeg is.
Lr. Nou zijn we er. Nu een mooie definitie. Wanneer is een functie f in a continu?
Ll. Als het beeld van een interval om a, als je het maar klein genoeg neemt, weer een interval is.
Heel eerlijk lezer, ik ben met het plaatje begonnen en kwam tot dit leergesprek. Toen kwam natuurlijk de schrik.
Neem de functie h van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$h(x) = \sin\frac{1}{x} \text{ voor } x \neq 0$$

$$h(0) = 0$$

Neem een interval om 0. Klein of niet klein, het beeld is [0, 1]. Dus een interval. Het zou wel een terminologische revolutie inhouden deze functie continu in 0 te noemen.
De moraal is wel duidelijk. Kies de voorbeelden waar je van uitgaat, met voorzichtigheid. En gebruik een goede stuurmanskunst.

P. G. J. Vredenduin

Verslag van de redactie over het jaar 1976-1977

Aan het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

De 52e jaargang heeft net als de vorige jaargang in het teken van 'elck wat wils' gestaan.
De redactie kan blijven putten uit een tamelijk grote voorraad artikelen over allerlei onderwerpen.
De redactie is in de loop van de afgelopen jaargang begonnen Euclides nog meer tot een echt wiskundedidactiektijdschrift te maken. Hierbij wil zij de leesbaarheid, ook voor de nieuwe lezers uit de MAVO- en LBO-sfeer voorop stellen.
Voor de lopende jaargang wil zij dit streven voortzetten.
Er komt een nummer, uitsluitend aan de afgelopen examens gewijd.
De besprekingen van schoolboeken wil de redactie verbeteren door het maken van een artikel dat opgebouwd is uit
- een objectieve weergave van de te beschouwen methode
- een subjectieve beschouwing over de methode, waarbij de visie van de redactie op wiskundeonderwijs naar voren komt
- een verslag van een gesprek met een aantal leraren-gebruikers
- een slotwoord van de auteurs.

Verder liggen er nog vage plannen voor speciale nummers gewijd aan de leraarsopleidingen, hulpmiddelen bij het rekenen en problemen-oplossen.
De samenwerking met de uitgever was ook de afgelopen jaargang goed.
De volgende mutaties vonden in de redactie plaats:
B. Zwaneveld volgde G. Krooshof als voorzitter op.
Drs. B. J. Westerhof verliet de redactie; hij werd opgevolgd door drs. W. E. de Jong.
Drs. S. A. Muller volgde W. Kleijne op als redactiesecretaris, die overigens redactielid blijft.
D. P. M. Krins trad tot de redactie toe.

Namens de redactie,
B. Zwaneveld, voorzitter
B. Muller, secretaris

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1976 - 31 juli 1977

Op 14 mei 1977 is ons bestuurslid L. van Beek plotseling overleden. Onze vereniging verloor in hem een bestuurslid, dat sinds 1969 veel werk voor de vereniging heeft verzet, speciaal voor de belangen van het wiskundeonderwijs bij het MAVO.
Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester drs. J. van Dormolen, overige leden L. van Beek (tot zijn overlijden), L. Bozuwa, F. F. J. Gaillard (sinds oktober), M. Kindt, F. J. Mahieu en dr. P. G. J. Vredenduin.
De heer E. H. Schmidt is wegens zijn verdiensten voor het wiskundeonderwijs tot erelid van de vereniging benoemd.
In augustus werd in Karlsruhe het derde internationale congres over wiskundeonderwijs gehouden. De vereniging heeft aan zes leden, die het congres bezochten, een tegemoetkoming in de kosten gegeven.
Met de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars is een regelmatig contact geweest. Op 16 oktober is een gemeenschappelijke bestuursvergadering in Antwerpen gehouden en op 12 maart is er een gemeenschappelijke bijeenkomst voor Vlaamse en Nederlandse leden gehouden in Breda, met als thema: 'Zakrekenmachientjes en computer met betrekking tot het onderwijs'.
Op 4 september zijn in Utrecht forumbijeenkomsten over de wiskunde-eindexamens 1976 gehouden voor HAVO en VWO.
De jaarvergadering is gehouden in het Dr. F. H. de Bruijne Lyceum te Utrecht op 30 oktober. Het centrale thema was: 'Het laatste schooljaar'.
Op 22 januari werd in het Dr. F. H. de Bruijne Lyceum te Utrecht een algemene vergadering gehouden over het eindexamenprogramma wiskunde I.
Op 25 mei werden op 6 plaatsen bijeenkomsten gehouden ter bespreking van het eindexamen wiskunde LBO-C/MAVO-3, waarna op 26 mei op 30 plaatsen soortgelijke bijeenkomsten werden gehouden voor het examen wiskunde MAVO-4.
De didactiekcommissie heeft weer verscheidene meerdaagse cursussen voor docenten georganiseerd.
Dit jaar verscheen de Engelse vertaling van de publikatie 'Vaardigheden' van drs. J. van Dormolen in samenwerking met de didactiekcommissie.
Tijdens de jaarvergadering werd een motie aangenomen tegen een voorgenomen opheffing van het IOWO, waarin de Minister van Onderwijs en Wetenschappen

wordt gevraagd de aankondiging van geleidelijke opheffing ongedaan te maken en opheldering te geven over de mogelijkheden van financiering van het IOWO. In mei werd de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen verzocht aan het advies van een advies-commissie brugklasonderwijs AVO-LBO/LAVO om in de brugklas VWO/HAVO het aantal wekelijkse lesuren van 4 tot 3 terug te brengen geen gevolg te geven.
In juni heeft het bestuur het lidmaatschap van de Raad van Vakgroepen beëindigd.
Het bestuur vergaderde dit jaar tienmaal, waaronder eenmaal met de inspecteurs drs. W. E. de Jong, drs. B. J. Westerhof en N. J. Zimmerman.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Ontvangen boeken

K. de Bruin e.a., *Getal en Ruimte, deel 5/6 V2, Analyse en statistiek voor de vijfde en zesde klas VWO*, 3de druk, 232 blz., *f* 18,50.
Getal en Ruimte, deel 5/6 V3, Wiskunde II voor de vijfde en zesde klas VWO, 3de, gewijzigde, druk, 251 blz., *f* 20,75.
Getal en Ruimte, deel 4/5 H2, Meetkunde en statistiek voor de vierde en vijfde klas HAVO, geheel herziene 4de druk, 264 blz.; *f* 20,50, Tjeenk Willink/Noorduijn, Culemborg 1977.

Boekbespreking

Arthur Engel, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik I*, Klett Studienbücher, Stuttgart 1973, 195 blz. DM 19.80.

In dit boek wordt de waarschijnlijkheidsrekening behandeld en de beginselen van de statistiek. Binomiale verdeling, normaal-verdeling, poisson-verdeling, hypergeometrische verdeling, polynomiaalverdeling, χ^2-test komen aan de orde.
Engel heeft de zeldzame gave aan de hand van ongekunstelde, interessante problemen de theorie te ontwikkelen. Het is het meest boeiende boek over waarschijnlijkheidsrekening dat ik ooit onder ogen gehad heb. Ook de vraagstukken zijn de moeite waard. Duidelijk wordt gedemonstreerd wat het grote belang van de waarschijnlijkheidsrekening in de praktijk is.
Ik kan iedere leraar die lesgeeft in de bovenbouw, aanraden dit boek aan te schaffen of door de school te doen aanschaffen. Hij zal er bij zijn lessen profijt van hebben.
Een tweetal eruit overgenomen aardigheden vindt men in de rubriek recreatie van dit nummer.

P. G. J. Vredenduin

Beiträge zum Mathematikunterricht 1976; 286 blz., DM 21.80; Hermann Schroedel Verlag, Hannover.

In Augsburg had in maart en april 1976 de tiende 'Bundestagung für Didaktik der Mathematik' plaats, waarover het bovengemelde congresverslag uitvoerig rapporteert.
Het is niet doenlijk een volledig overzicht te geven van de meer dan 50 inleidingen die er gehouden zijn. Ik beperk me tot een opsomming van de titels van de 'Hauptvorträge'.

(1). Rudolf Albrecht, Der Computer im Unterricht.
(2). Joop van Dormolen, Some efforts to repair shortcomings in teachers training in Holland.
(3). Arnold Kirsch, Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozesse und Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht.
(4). Gerard Messerle und Walter Neunzig, Empirische Untersuchungen über die Auswirkungen von Partnerarbeit und Klassenunterricht.
(5). Ursula Viet, Leistungsdifferenzierung im Mathematikunterricht.
(6). Heinrich Winter, Die Erschlieszung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule.

Van Dormolens referaat is het enige dat in het Engels werd uitgesproken en opgenomen.
De titels van de onderwerpen die ter sprake zijn gebracht doen uitkomen dat de belangstelling in stijgende mate uitgaat naar wezenlijk 'didactische' problemen, al ontbreken de 'spezielle stofforientierte Referate' niet.
Ook voor vele Nederlandse wiskundedocenten kan dit tiende congresverslag betekenis hebben.

Joh. H. Wansink

Erna Sebbel, *Die Reform der gymnasialen Oberstufe in Nordrhein-Westfalen*; 184 blz., ingen. 1976; DM 13,80; Auswahlreihe B, 84-85; Hermann Schroedel Verlag, Hannover.

In dit boekje zijn een aantal eerder gehouden inleidingen en referaten gebundeld, die alle handelen over de na de oorlog tot stand gekomen onderwijsreorganisatie in het gymnasiale onderwijs. Belangrijk zijn in deze ontwikkelingen de *Saarbrücker Rahmenvereinbarung* van 1960 en de *Bonner Vereinbarung* van 1972, terwijl ook enkele andere overeenkomsten (Hamburg 1964, Düsseldorf 1965, Berlijn 1966) worden besproken.
Er wordt in Duitsland gestreefd, evenals elders, naar individualisering van het leerproces, naar meer vrijheid van de leerlingen bij het vaststellen van hun studieplan, naar prijsgeving

van het strakke schoolklassenverband, naar invoering van nieuwe schoolvakken, naar de mogelijkheden om meer leerlingen te laten studeren dan eertijds om sociaal-economische redenen nog mogelijk bleek.
Ook voor de Nederlandse docent zijn de gebundelde beschouwingen van betekenis, omdat ze voor hem het internationale karakter van tal van strevingen in het licht stellen. In het verleden hebben de Nederlandse wiskundeleraren reeds hun belangstelling getoond voor de 'Auflockerung der Oberstufe', zoals bleek door de lezingen die Wagenschein eertijds heeft gehouden over de problematiek in Hessen in bijeenkomsten van de Wiskunde-werkgroep van de WVO.
Na de Oberstufe is ook de reorganisatie van de Mittelstufe aan de beurt gekomen. De Enttypisierung van het Duitse gymnasium heeft zich nu over de hele linie voltrokken. Traditioneel kenden we het altsprachliche type, het neusprachliche en het mathematisch-naturwissenschaftliche. Daarnaast ontstonden nieuwe typen: in Nordrhein-Westfalen het sozialwissenschaftliche, wirtschafts- und sozialwissenschaftliche und musische Gymnasium, das Gymnasium für Frauenbildung, en tal van Aufbautypen für Haupt- und Realschulabsolventen.
Holtzapfel geeft over de periode 1960 tot 1972 een boeiend overzicht. Acker behandelt de '*Schulversuche zur Reform der gymnasialen Oberstufe*'. Alleen reeds in Nordrhein-Westfalen hebben er in de jaren 1965–1971 ongeveer 80 experimenten plaats gevonden.
Van de verdere bijdragen noemen we nog:
Geldschläger: *Die Reform der gymnasialen Mittelstufe*,
Erna Sebbel, *Konzept für die Realisierung der Oberstufereform*,
en voorts van een groep docenten:
Beratung und Schulaufbaukontrolle in der differenzierten gymnasialen Oberstufe.
Lezing van deze goed gedocumenteerde bundel kan ik de Nederlandse collega's van harte aanbevelen.

Joh. H. Wansink

Dr. W. Schöne, *Differentialgeometrie*, Minöl bd. 6, B. G. Teubner, Leipzig, 147 blz., 12,– M.

In dit boekje wordt op vrij klassieke wijze een inleiding gegeven in de differentiaalmeetkunde:
ruimtekrommen: formules van Frenet, kromming e.d.
vlakke krommen: parametervoorstelling, evolute e.d.
vlakkentheorie: kromming, indicatrix van Dupin, geodetische kromming e.d.
De opbouw van het geheel is helder en duidelijk. Aan de hand van een aantal voorbeelden wordt de theorie nog eens verwerkt. De oplossingen van de vraagstukken zijn aan het eind van het boek toegevoegd, hetgeen de bruikbaarheid (mede voor zelfstudie?) verhoogt.
De uitvoering van het boek is dor: ook hier weer het bekende grauwe papier, hetgeen in ieder geval de prijs (en meer ook niet) ten goede komt.

W. Kleijne

Dr. P. Meinhold, Dr. E. Wagner, *Partielle Differentialgleichungen*, Minöl Bd 8, B. G. Teubner, Leipzig, 112 blz., DM 12,–.

Deze inleiding tot de partiële differentiaalvergelijkingen geeft alles wat van een inleiding tot dit onderwerp verwacht mag worden. Zo komen achtereenvolgens ter sprake:
begrip en classificatie
partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde:
  karakteristiek systeem, fundamentaalsysteem, algemene lineaire en quasi lineaire dv., beginwaarde probleem, niet-lineaire dv. van de eerste orde
partiële differentiaalvergelijkingen van de tweede orde:
  normaalvorm, constante coëfficiënten, elementaire integratiemethoden, invoering van parameters
rand- en beginwaarde problemen: parabolische, hyperbolische en elliptische dv., homogene en

inhomogene voorwaarden, methoden van d'Alembert en van Fourier, harmonische functies inleiding tot de potentiaaltheorie.
Nergens gaan de schrijvers diep op de theoretische achtergronden in. Men probeert vooral praktisch te zijn, hetgeen voor de lezersgroep waarvoor dit boek bestemd is, zeker op zijn plaats is: Minöl: Mathematik für Ingenieure Ökonomen Landwirte.
Voor diepergaande beschouwingen verwijst men nogal eens naar andere werken. De uitleg van de stof is helder en goed. Vele voorbeelden begeleiden de tekst. De oplossingen van de vele vraagstukken zijn achterin het boek opgenomen. Een literatuurlijst en een register sluiten het werk af.

W. Kleijne

J. Adé, P. Bockstaele, R. Holvoet, R. Verhulst, A. Warrinnier, *Algemene topologie en inleiding tot de analyse*, Acco Leuven, 1976, IX + 115 blz., 180BF.

Het boek geeft de inhoud weer van de Vliebergh-Sencieleergangen 1975–1976. Deze leergangen worden georganiseerd door de Katholieke Universiteit Leuven. Ze dienen voor de bijscholing van wiskundeleraren.
Een dergelijk boek heeft het grote voordeel geen systematisch leerboek te zijn, maar in kort bestek een aantal samenhangende onderwerpen te behandelen die voor de cursist essentieel en boeiend zijn. De didactische eisen waaraan een dergelijke cursus moet voldoen, maken het boek plezierig leesbaar. Menig leraar zal het dan ook graag lezen om zijn kennis te verruimen of op te frissen.
Wijselijk wordt begonnen met metrische ruimten. Vanuit de metriek komt men tot een makkelijke definitie van open verzamelingen. Hiervan uitgaand komt men door abstractie tot de algemene topologische ruimte, uiteraard axiomatisch gefundeerd. Men krijgt een overzicht over de fundamentele begrippen uit de topologie. Hierna volgen de continue afbeeldingen, de homeomorfismen en de limieten.
Het vierde hoofdstuk gaat over samenhang. Van dit hoofdstuk kan men veel plezier beleven. Een groot aantal stellingen wordt bewezen, die elk een stimulans zijn voor zelfwerkzaamheid.
Ten slotte vindt men, dat in $\mathbb{R}$ geldt: V is samenhangend $\Leftrightarrow$ V is convex, waarna men meteen een overzicht verkrijgt van alle samenhangende delen van $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}^n$ geldt alleen: V is convex $\Rightarrow$ V is samenhangend.
Hoofdstuk 5 behelst de compacte verzamelingen. Ook hier verschillende belangrijke stellingen, zoals:
in een compacte ruimte geldt: V is gesloten $\Rightarrow$ V is compact;
in een hausdorff ruimte geldt: V is compact $\Rightarrow$ V is gesloten;
in een compacte hausdorff ruimte geldt: V is gesloten $\Leftrightarrow$ V is compact;
in een metrische ruimte met natuurlijke topologie geldt:
V is compact $\Rightarrow$ V is gesloten en begrensd;
in $\mathbb{R}^n$ geldt: V is gesloten en begrensd $\Leftrightarrow$ V is compact.
De lezer kan zich afvragen, wat men aan deze begrippen heeft. De auteurs geven een interessant antwoord op deze vraag. Ze laten zien, dat de stellingen over samenhang en compacticiteit een goede basis leveren voor de bewijzen van fundamentele stellingen uit de analyse, zoals de tussenwaardestelling. Natuurlijk kan men deze stelling ook op andere wijze aantonen, maar dat vermindert de waarde van hun betoog niet.
Een geschikte collectie vraagstukken verhoogt nog de waarde van dit aardige boekje.

P. G. J. Vredenduin

I. O. Kerner, *Numerische Mathematik und Rechentechnik*, deel 1.2/1.2/2. Mathematisch Naturwissenschaftliche Bibliothek, band 46, 47/1, 47/2, B. G. Teubner, Leipzig, resp. 168 blz., 254 blz., 255 blz., en resp. DM 18.50, DM 24.–, DM 24.–.

In deze deeltjes wordt een gedegen inleiding gegeven van enige onderwerpen uit de numerieke wiskunde en de programmeertechniek hiervan.

E.e.a. wordt zorgvuldig opgebouwd en wel zodanig dat niet-vak-wiskundigen het gebodene tot op grote hoogte kunnen volgen. Dit geldt zeker voor deel 1 waarin allereerst de grondbegrippen van het programmeren aan de orde komen. Hierbij komt tevens een kort historisch overzicht van de rekenautomaten. Ook gaat de schrijver even in op coderingsproblematiek.
Na enige logica wordt dan overgestapt op wat numerieke wiskunde, waarna het programmeren van eenvoudige problemen in Algol aan de orde komt. Deel twee gaat dieper in op de behandeling van adressen, zowel voor machine- als voor assemblertalen. Verder wordt vrij nauwkeurig ingegaan op procedures van Algol 60. Stelsels lineaire vergelijkingen, oplosbaarheidseigenschappen, interpolatie en approximatie, numerieke integratie en enige (zeer vluchtig) functionaalanalyse vormen het numerieke gedeelte van deel 2/1. Na in deel 2/2 polynoomvergelijkingen, gewone differentiaalvergelijkingen en lineaire programmering besproken te hebben, behandelt de schrijver nog vrij diepgaand diverse onderwerpen uit de techniek van het programmeren.
Een grondig werk, dat ik ieder die van genoemde onderwerpen wil kennisnemen, kan aanbevelen.

W. Kleijne

Theo Jansen en Anne-Ruth van Kammen, *Projectonderwijs afleren en aanleren*; 117 blz., ingenaaid; geen jaartal, prijs onbekend. Muusses, Purmerend.

Over de plaats van projektonderwijs in ons voortgezet onderwijs bestaan tot dusver velerlei vaagheden, misverstanden en dubbelzinnigheden, zoals de auteurs in hun voorwoord constateren. Het ontwikkelen van een verantwoord projektonderwijs betekent voor hen een politiek-maatschappelijke activiteit. Aan het slot van hun boekje vermelden ze dat ze met hun onderwijs ook willen bereiken dat alle betrokkenen 'zich solidair gaan voelen met andere en grotere groepen mensen die waar dan ook vanuit hun situatie van onderdrukking proberen de maatschappij te veranderen in een samenleving waarin angst, ongelijkheid en uitbuiting tot het verleden behoren . . .'
Over de moeilijkheden ondervonden bij hun pogingen in de aangegeven richting geven de auteurs een bont commentaar, zonder dat dit m.i. leidt tot een rechtvaardiging van plaats en functie van een projektonderwijs in hun stijl.
Het projektonderwijs waarover in de brochure wordt gesproken heeft plaats gehad aan de Rijksscholengemeenschap te Wageningen. Van de vele medewerkers ter plaatse en van de Universiteit van Nijmegen worden er 26 met name genoemd.
De auteurs hebben in 1975 en 1976 in het tijdschrift 'Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs' onder de titel van deze brochure een serie artikelen doen verschijnen. Muusses in Purmerend is op verzoek van de 'Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding, Onderwijs en Maatschappij (W.V.O.)' tot de uitgave van deze brochure overgegaan.

Joh. H. Wansink

H. Rollnik, Physikalische und Mathematische Grundlagen der Electrodynamik, B.I.Hochschultaschenbücher Band 297, 1977. 291 blz.

De auteur publiceert hiermede zijn colleges over dit onderwerp aan eerstejaars-studenten in natuurkunde aan de universiteit te Bonn.
Het eerste hoofdstuk geeft een historisch overzicht van het ontstaan van de theoretische begrippen en hun weerslag in de abstracte mathematische, die in de elektrodynamica een rol spelen. De basiskennis van de vectorrekening wordt bekend ondersteld, de benodigde wiskunde op andere gebieden wordt afgeleid.
'Euclides' lijkt me niet het geschikte tijdschrift voor een uitvoerige bespreking.

W. Burgers

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

Opgaven

375. Een leraar vraagt zijn leerlingen thuis een serie van 50 worpen met een munt te doen en de uitslag te noteren door middel van een reeks 0'en en 1'en. Een leerling komt op school met de volgende serie:
10101101001011000101100101011000101010011001010100
De leraar beweert, dat de leerling niet echt gegooid heeft, maar een serie 0'en en 1'en heeft gefantaseerd. Waarom vermoedt hij dit?

376. Matthaeus, Marcus en Lucas zijn ter dood veroordeeld. Eén van de drie krijgt genade, maar zijn naam wordt streng geheim gehouden. Matthaeus zegt tegen zichzelf: de kans dat ik het ben, is $\frac{1}{3}$.
Hij zegt tegen de bewaker: Eén van de twee, Marcus en Lucas, wordt zeker ter dood gebracht. Je verraadt mij dus niets, als je mij één man noemt, Marcus of Lucas, die ter dood gebracht wordt. Daarop zegt de bewaker: Marcus wordt ter dood gebracht. Nu zegt Matthaeus tegen zichzelf: Lucas of ik krijgt genade. De kans dat ik niet ter dood gebracht wordt, is dus $\frac{1}{2}$.
Heeft Matthaeus gelijk?

Oplossingen

Voor de opgaven zie het vorige nummer.
Er zijn nog geen oplossingen van 372 en 373 binnengekomen. Zelf ben ik er nog niet in geslaagd een oplossing te vinden.

Mededelingen

200-jarig bestaan Wiskundig Genootschap

Op het congres dat gehouden wordt ter gelegenheid van het 200-jarig bestaan van het W.G. zal op donderdag 30 maart een sectie didactiek georganiseerd worden. Degene die een korte voordracht (20 minuten) wil houden, wordt verzocht zich voor 1 december op te geven bij dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, Warnsveld (tel. 05750 - 1 51 05). Voor 15 januari moet een abstract van de voordracht ingezonden worden. Men behoeft geen lid van het W.G. te zijn.
Nadere mededelingen over het congres volgen.

Het bestuur van de N.V.v.W.

Lerarendag wiskunde op 6 januari 1978
De Subfaculteit der Wiskunde van de Rijksuniversiteit te Leiden heeft het plan opgevat op vrijdag 6 januari 1978 een dag te organiseren voor leraren wiskunde.
Gedurende de lerarendag zullen voordrachten worden gehouden over onderwerpen die voor leraren wiskunde van belang zijn. Daarbij wordt gedacht aan verdieping van wiskunde-onderwerpen die op het VWO worden behandeld, zoals differentiaalvergelijkingen, statistiek en computerkunde. Bovendien wordt gedacht aan onderwerpen die vooral de laatste jaren in de belangstelling zijn gekomen en die tijdens de studie van veel leraren niet aan de orde zijn geweest, zoals topologie, grafentheorie en informatica. Daarnaast achten wij het van belang de leraren wiskunde te informeren over het huidige programma van de wiskunde-studie aan onze subfaculteit, zodat op de scholen de adspirant-studenten op basis van de actuele situatie over de studie wiskunde kunnen worden voorgelicht. Verder ligt het in de bedoeling tijdens deze dag een aantal wiskunde-films te vertonen.
De lerarendag begint om 10.00 uur en zal omstreeks 16.00 uur worden beëindigd. Aan de deelnemers zal een lunch worden aangeboden. Indien u aan de lerarendag wilt deelnemen, verzoek ik u de heer H. Langenberg, beheerder van de subfaculteit te, bellen (tel. 071 - 148333 - tst. 5030).

Rectificatie Wisbrug 200 (vorig nummer, blz. 82)
Wisbrug 200 vindt niet plaats in de week van 2-6 januari 1978, maar in de eerste week na de kerstvakantie.
J. van Dormolen

Wiskunde en Onderwijs

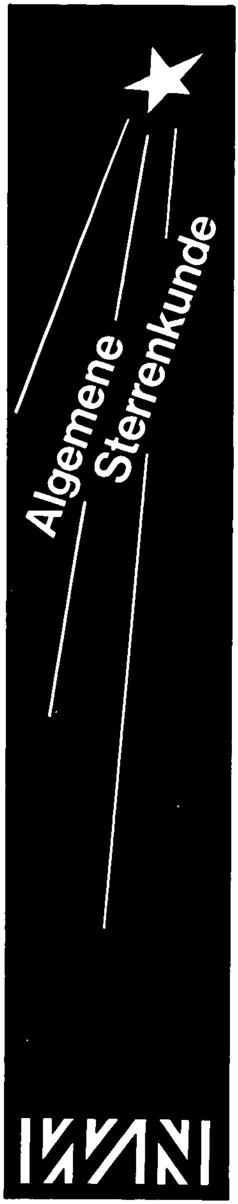
De abonnees op het tijdschrift Wiskunde en Onderwijs wordt verzocht het abonnementsgeld voor het jaar 1978 voor 15 december a.s. over te maken op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth. Het bedrag is onveranderd *f* 20, –. U zoudt me een groot plezier doen dit bedrag meteen te voldoen, omdat ik het voor 1 januari moet afdragen.
Nieuwe abonnees zijn welkom. Ze kunnen zich opgeven door storting van het genoemde bedrag, met vermelding op het stortingsbewijs van 'nieuw abonnement'. Ze zijn dan tevens lid van de VVWL, de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars en hebben daarmee het recht deel te nemen aan de activiteiten van deze vereniging.

P. G. J. Vredenduin
Dillenburg 148, Doorwerth (tel. 085 - 333807)

Gezamenlijke studiedag van VVWL en NVvW

Op zaterdag 18 maart wordt te Breda de derde gemeenschappelijke studiedag gehouden voor leden van de Vlaamse en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars(aren).
Het thema luidt: gebruik en misbruik van variabelen en kwantoren.
De vorige studiedag mocht zich in een grote belangstelling verheugen. We hopen dat dit weer het geval zal zijn.
Nadere mededelingen volgen. U kunt nu reeds de datum in uw agenda noteren.
Gaarne tot ziens op die dag.

Het bestuur


Algemene
Sterrenkunde

Technische Hogeschool Delft

Bij de onderafdeling der Wiskunde kan worden geplaatst een

VAKDIDACTICUS WISKUNDE (M/V)

ten behoeve van de opleiding tot 1e graads wiskundeleraar.

Taakomschrijving: tot de taak van de vakdidacticus zal behoren het verzorgen van onderwijs en het verrichten van onderzoek op het gebied van de didactiek der wiskunde in het kader van de opleiding tot 1e graads leraar in de wiskunde. Tevens zal hij/zij – in samenwerking met andere vakdidactici en onderwijskundigen – een bijdrage moeten leveren aan de opbouw van de in te stellen lerarenvariant. Ook moet de te benoemen functionaris bereid zijn op andere gebieden van het wiskundeonderwijs/onderzoek zijn bijdrage te leveren.

Vereisten: doctoraal examen wiskunde of hiermede overeenkomstige opleiding; ruime onderwijservaring bij het V.W.O.; practische en theoretische kennis van de problematiek van de didactiek der wiskunde.

Nadere inlichtingen omtrent deze functie worden gaarne verstrekt door de voorzitter van de benoemingsadviescommissie: lector dr. A. W. Grootendorst, tel. 015-78 45 72, of met de huidige functionaris dr. P. G. J. Vredenduin, tel. 085-33 38 07.

Aanstelling en bezoldiging volgens Rijksregeling zal geschieden in het rangenstelsel der wetenschappelijke medewerkers. Directe opneming in welvaartsvast pensioenfonds.

Schriftelijke sollicitaties te richten aan het Hoofd van de Centrale Personeelsdienst, Julianalaan 134 te Delft, onder vermelding van nr. WI 7703 in de rechterbovenhoek van de brief,

INHOUD:

ADRESSEN AUTEURS:

Fred Goffree, Bremlaan 16, Den Dolder.

Frank Laforce, Elzenhoutstraat 2, 2610 Wilrijk, België.

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

H. A. van Wely, Guido Gezellestraat 23, 2400 Mol, België.